



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Teorema do Hex

Helena Carriço

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
**Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no
Secundário**
(2.º ciclo de estudos)

Orientadores:
Prof. Doutor Fernando Manuel Tavares Pereira
Prof. Doutor Pedro Ferrão Patrício

Covilhã, Outubro de 2011

Agradecimentos

Ao longo deste último ano, foram várias as pessoas que me apoiaram directa e indirectamente, e todos merecem o meu reconhecimento e gratidão.

Aos meus orientadores, Professor Doutor Fernando Manuel Tavares Pereira e Professor Doutor Pedro Ferrão Patrício, pela dedicação, empenho e disponibilidade com que me acompanharam ao longo deste trabalho.

Não posso deixar de agradecer de modo muito especial aos meus pais, irmã, cunhado e amigos, pela compreensão, apoio incondicional, incentivo e motivação imprescindíveis sem os quais não teria sido possível a realização deste trabalho.

O meu muito obrigada a todos!

Resumo

O Hex é um jogo de tabuleiro para dois jogadores cujo objectivo consiste em estabelecer uma sequência de peças unindo dois lados opostos do tabuleiro. O jogo possui regras simples, encerrando contudo elevado interesse e riqueza matemática. Neste trabalho abordamos alguma desta riqueza, começando por provar que se um tabuleiro de Hex está completamente preenchido então existe um caminho a unir margens opostas (Teorema do Hex). Mostramos ainda que este resultado é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e válido para um tabuleiro de dimensão n . Por último, servimo-nos dos resultados anteriores na demonstração do Teorema da Curva de Jordan, bem como na do Teorema da Pavimentação.

Palavras-chave

Jogo do Hex, Teorema do Hex, Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema da Curva de Jordan, Teorema da Pavimentação.

Abstract

Hex is a board game for two where each player tries to establish a sequence of stones connecting his opposing sides of the board. Although the rules are simple, the game contains interesting properties in mathematical terms. In this work, we address some of these properties by proving the Hex Theorem, which states that if a board is completely filled then there is a path of stones with the same colour between opposing sides. We also show that this result is equivalent to the Brouwer Fixed-Point Theorem and we generalise it to the n dimensional board case. Lastly, we use these results in proving the Jordan Curve Theorem and the Tiling Theorem.

Keywords

Game of Hex, Hex Theorem, Brouwer Fixed-Point Theorem, Jordan Curve Theorem, Tiling Theorem.

Conteúdo

Introdução	1
1 O Jogo do Hex	3
1.1 Descrição	3
1.2 Origem e História	4
1.3 O Teorema do Hex	5
1.4 O Tabuleiro de John Nash	8
1.5 A Equivalência entre o T.H. e o T.P.F.B.	8
2 O Hex de Dimensão n	15
2.1 O Tabuleiro de Hex	15
2.2 O Teorema do Hex	16
2.3 Conjunto- i vencedor	21
2.4 Aproximação ao Ponto Fixo	23
3 Algumas Contribuições do Teorema do Hex	29
3.1 O Teorema da Curva de Jordan via o Teorema do Hex	29
3.2 O Teorema do Hex Fortalecido	33
3.3 O Teorema da Pavimentação	33
A	39
A.1 Definições e Resultados Teóricos sobre Grafos	39
A.2 Definições e Resultados Teóricos sobre Funções	40
A.3 Definições e Resultados Teóricos sobre Espaços Topológicos	41

Lista de Figuras

1.1	Tabuleiro de Hex de 11×11 .	3
1.2	Tabuleiro de Hex parcialmente preenchido.	4
1.3	Primeiro problema publicado.	5
1.4	Tabuleiro completamente preenchido e grafo Γ .	6
1.5	Subgrafo Γ' .	7
1.6	Ilustração da construção de um caminho segundo a regra estabelecida.	7
1.7	Representação da equivalência entre os tabuleiros de Hein e de Nash.	8
1.8	Tabuleiro de Nash.	8
1.9	Representação gráfica do tabuleiro de Nash de tamanho $k = 6$, H_6 .	9
1.10	Tabuleiro de Nash “adaptado” de tamanho $k = 4$, à esquerda e a imagem dos respectivos vértices à direita.	13
1.11	Representação dos subconjuntos P^+ , P^- , B^+ e B^- .	13
2.1	Representação do simplex σ_0 .	17
2.2	Representação do simplex σ_0 e dos seus vizinhos.	19
2.3	Tabuleiro preenchido de forma aleatória em H_3^3 . Os restantes vértices de \widehat{H} respeitam a regra \widehat{L} .	22
2.4	Aplicação do algoritmo.	23
3.1	Representação das imagens das funções h e v .	30
3.2	Ilustração das etapas 1), 2) e 3) da demonstração.	32
3.3	Rectângulo com um lado inteiro.	34
3.4	Rectângulo com os dois lados de comprimento não inteiro.	34
3.5	Área destacada na figura 3.4.	34
3.6	Área preta em excesso.	35
3.7	Grafo Γ .	36

Introdução

O tema principal tratado neste trabalho aproxima-se da Matemática Discreta, apesar de se fazerem algumas incursões noutras áreas da Matemática, em particular na Análise Infinitesimal. O assunto tratado prende-se com algumas particularidades do jogo de tabuleiro chamado Hex que permitem estabelecer relações com alguns resultados clássicos da Matemática.

Este trabalho tem essencialmente um carácter de divulgação científica. Com base num conjunto de referências bibliográficas tentámos criar um documento de leitura fácil que reduzisse a habitual densidade das publicações científicas, enriquecendo-o com exemplos, figuras e uma abordagem mais adequada para leitores exteriores à comunidade científica.

Qualquer docente que leccione em áreas científicas mais abstractas, seja a que nível de ensino for, passa pela dificuldade da falta de motivação dos alunos. É habitual escutar-se “mas para que é que isto serve?”. Este problema torna imperioso que o docente esteja munido de uma cultura geral na área das ciências que o capacite a responder a este tipo de solicitações. Com este trabalho pretendemos dar um pequeno contributo na superação da dificuldade apresentada. Apesar de neste documento não se exibir a resolução dum problema da vida real utilizando um qualquer modelo matemático, o insólito da relação que se estabelece entre um jogo de tabuleiro e um resultado clássico da Matemática é só por si gerador de curiosidade propiciando um ambiente que torne o estudo da Matemática mais agradável.

Este documento encontra-se organizado em três capítulos. O primeiro, com o título “O Jogo do Hex”, para além da óbvia descrição do jogo e dum breve resumo histórico, contém os dois resultados mais importantes: o Teorema do Hex que prova que o jogo não termina sem que um dos jogadores cumpra com o objectivo imposto pelas regras e o teorema que demonstra que este último resultado é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. No segundo capítulo generaliza-se o Teorema do Hex provado no capítulo anterior para uma qualquer dimensão. Tal obriga a uma generalização na definição do tabuleiro de jogo. Da demonstração do teorema extrai-se um algoritmo que permite aproximar pontos fixos a menos de um erro que depende do tamanho do tabuleiro. No último capítulo apresentam-se mais algumas relações entre o Hex e diferentes áreas da Matemática que têm sido observadas nas últimas décadas, nomeadamente com o Teorema da Curva de Jordan e um outro teorema menos conhecido que apelidámos de Teorema da Pavimentação.

Esta trabalho termina com um apêndice onde decidimos juntar algumas definições clássicas da Teoria de Grafos e da Análise e ainda alguns resultados mais conhecidos.

Capítulo 1

O Jogo do Hex

O jogo do Hex é um jogo de regras muito simples mas de grande interesse quer do ponto de vista do jogo propriamente dito quer do ponto de vista matemático. Ao longo deste capítulo vamos fazer uma breve descrição do jogo, da sua origem e história e vamos enunciar e demonstrar o Teorema do Hex. A concluir o capítulo provaremos que o Teorema do Hex e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer são equivalentes. Ambas as demonstrações foram elaboradas com base num artigo de David Gale [1], de 1979.

1.1 Descrição

O jogo do Hex é um jogo de tabuleiro para dois jogadores, um dos quais utiliza peças brancas¹ e o outro peças pretas. O tabuleiro tem a forma de losango e é tipicamente composto por 11×11 hexágonos, conforme representado na figura 1.1.

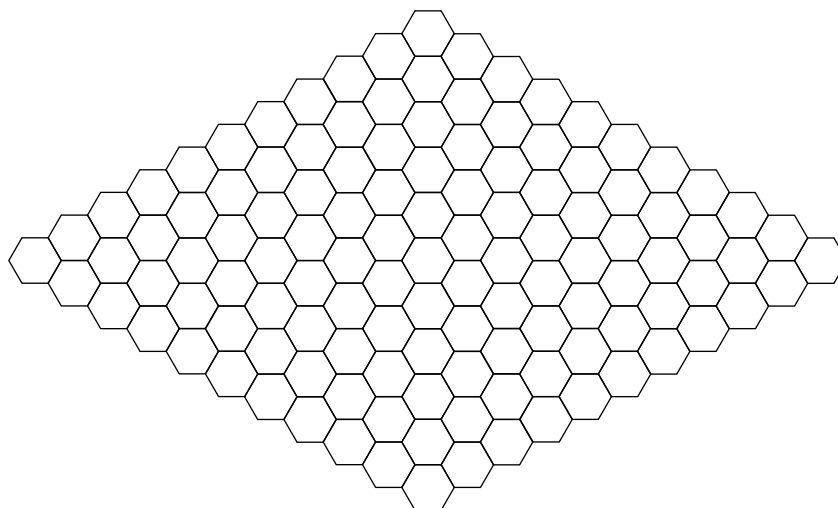


Figura 1.1: Tabuleiro de Hex de 11×11 .

Alternadamente, os jogadores colocam uma peça da sua cor num hexágono vazio. O segundo jogador, na sua primeira jogada pode aproveitar a jogada efectuada pelo seu adversário, impondo a troca de cores. Esta é a chamada regra do equilíbrio que foi criada para anular a vantagem de se jogar em primeiro lugar. O objectivo do jogador das peças brancas (pretas) consiste em

¹Nas figuras as peças brancas são representadas por cinza claro.

estabelecer uma sequência de peças brancas (pretas) colocadas em hexágonos contíguos, unindo as suas margens opostas. Tal sequência será designada de caminho ou conjunto vencedor.

Se observarmos a figura 1.2 podemos verificar que ainda nenhum jogador ganhou e que é a vez do jogador das peças brancas. Note-se que o jogador das peças pretas consegue obter uma vitória ao fim de três jogadas, desde que jogue nos hexágonos assinalados com “X”. Observe-se ainda que uma tentativa de defesa do jogador das peças brancas não impede a vitória do adversário.

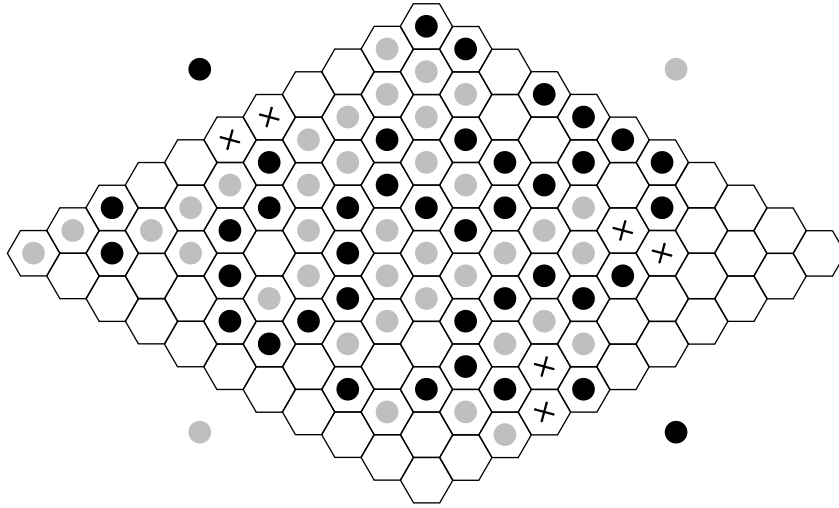


Figura 1.2: Tabuleiro de Hex parcialmente preenchido.

Uma questão que surge habitualmente neste tipo de jogos prende-se com a existência de uma estratégia que garanta a vitória de um dos jogadores e se o primeiro a jogar poderá tirar partido dessa estratégia. A sua existência prende-se com o facto de o jogo ser finito, de informação completa, não depender do acaso e nunca terminar empatado, como se mostrará mais à frente. Suponhamos que o segundo jogador possui a estratégia vencedora, então o primeiro jogador coloca a primeira peça de forma aleatória e a partir daí encara-se como sendo o segundo jogador, roubando a estratégia vencedora ao seu adversário. Deste modo, o primeiro jogador terá a vitória garantida, isto partindo do pressuposto que existe uma estratégia vencedora para o segundo jogador. Ou seja, partiu-se da hipótese que o segundo jogador possui a estratégia vencedora e concluiu-se que quem ganha é o primeiro. Logo, pode concluir-se que é vantajoso ser o primeiro a jogar. Este argumento, usado por John Nash, ficou conhecido como argumento do roubo da estratégia. Com este argumento apenas se prova que o primeiro jogador ganha, mas não se sabe como, ou seja, prova-se que existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador mas não se conhece essa estratégia. Até ao momento já se conhece a estratégia vencedora para tabuleiros até 7×7 .

1.2 Origem e História

O jogo do Hex foi inventado em 1942 pelo engenheiro e poeta dinamarquês Piet Hein. Piet Hein chamou o jogo de Polygon e apresentou-o ao público pela primeira vez a 26 de Dezembro de 1942, através de um artigo publicado no jornal Politiken. Nessa primeira publicação o jogo foi apresentado da seguinte forma:

“Gostaria de aprender a jogar Polygon? Piet Hein inventou um jogo que pode ser praticado com igual prazer tanto por eruditos jogadores de Xadrez como por pessoas apenas capazes de pegar numa caneta.”

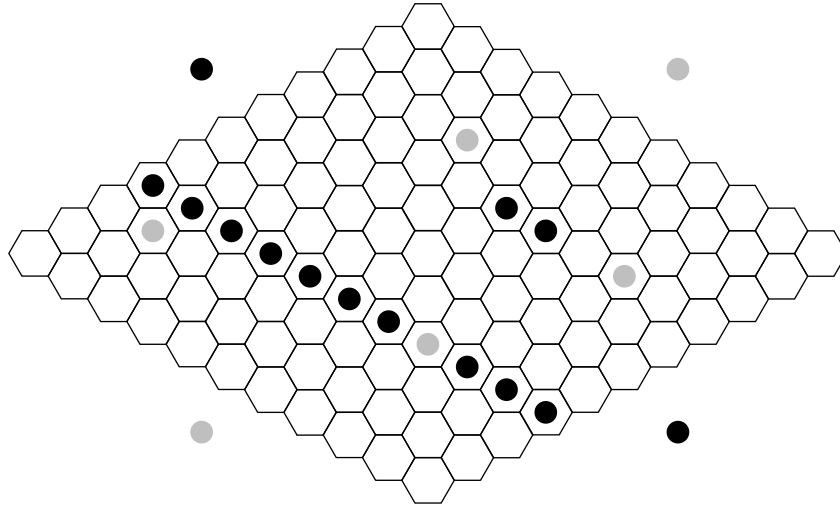


Figura 1.3: Primeiro problema publicado.

Na figura 1.3 pode observar-se o problema proposto no primeiro artigo sobre o Hex. O objectivo consiste em colocar uma peça branca no tabuleiro de modo a que o jogador das peças pretas não tenha hipótese de defesa.

Alguns anos mais tarde, em 1948, o jogo foi redescoberto por John Nash enquanto estudante da Universidade de Princeton. Nesta versão o tabuleiro é análogo ao tabuleiro de Xadrez, colocando-se as peças nas intersecções das linhas. Foi David Gale, colega de Nash, que se apercebeu da equivalência entre os dois tabuleiros (o de Hein e o de Nash), como se mostrará na secção 1.4.

O jogo foi baptizado de Hex aquando da sua comercialização pela Parker Brothers, em 1952, e adquiriu uma maior projecção devido à publicação de um artigo de Martin Gardner na revista *Scientific American*.

As características do Hex desde cedo suscitaram o interesse de vários matemáticos, tendo-se revelado bastante úteis na abordagem de diversos problemas, como veremos ao longo deste trabalho.

1.3 O Teorema do Hex

Durante uma partida de Hex, se um jogador completar um caminho entre os seus lados na sua vez de jogar, então esse jogador é declarado vencedor e o jogo termina. Este momento pode ser atingido sem que o tabuleiro esteja todo preenchido. No caso do jogo do Galo o tabuleiro pode ser totalmente preenchido sem que nenhum jogador complete uma linha, sendo declarado um empate. Uma questão pertinente é saber se o mesmo pode ocorrer com o Hex: a última casa é preenchida e nenhum jogador atingiu o objectivo. Prova-se que tal nunca ocorre! Este facto é intuitivamente fácil de provar, para isso basta considerarmos um tabuleiro completamente preenchido de peças brancas e pretas e associar as brancas à água de um rio e as pretas à terra das margens do rio. Então, apenas duas situações podem acontecer, ou a água corre, ou há um dique a unir as duas margens do rio, impedindo que a água corra. Na primeira situação é o jogador das peças brancas que ganha e na segunda ganha o jogador das peças pretas. Note-se que neste exemplo uma hipótese exclui a outra, o que é mais forte do que o Teorema do Hex:

Teorema 1.3.1 *Se um tabuleiro de Hex está completamente preenchido com peças pretas e peças brancas, então existe pelo menos um caminho que une lados opostos.*

Demonstração: Considerando o tabuleiro completamente preenchido, designemos por face- P um

hexágono onde se encontre colocada uma peça preta ou uma das margens P ou P' (ver figura 1.4). A face- B é definida de forma análoga, relativamente a peças e margens brancas.

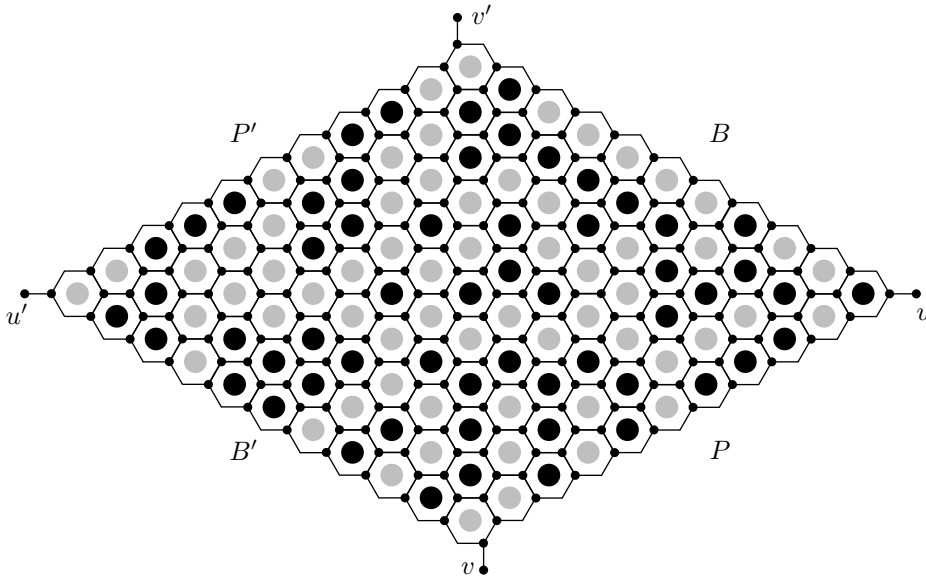


Figura 1.4: Tabuleiro completamente preenchido e grafo Γ .

Associemos ao tabuleiro de Hex um grafo em que cada vértice é o ponto de intersecção de dois ou três “cantos” dos hexágonos. As arestas desse grafo correspondem aos lados internos comuns a dois hexágonos ou à fusão de dois lados exteriores do mesmo hexágono. Para além dos vértices associados aos hexágonos dos quatro cantos do tabuleiro, vamos ainda associar mais um vértice a cada um dos “cantos” livres. Cada um destes vértices, para além de ser adjacente a dois vértices do mesmo hexágono, é também adjacente a um novo vértice representado na figura 1.4 por u , u' , v e v' . As arestas correspondentes cumprem a função de separação das quatro margens do tabuleiro. Repare-se que os quatro hexágonos dos cantos são os únicos hexágonos das margens do tabuleiro que permitem a ambos os jogadores completar um caminho que ligue as suas margens opostas, pois são os únicos que pertencem a uma margem preta e a outra branca. Designemos o grafo resultante por Γ , e note-se que todos os vértices do grafo têm grau menor ou igual a 3.

Com o objectivo de encontrar um conjunto vencedor num tabuleiro que se encontre completamente preenchido segue-se o seguinte algoritmo: começando num dos vértices u , u' , v ou v' constrói-se um caminho no grafo Γ respeitando a regra de continuar sempre ao longo de uma aresta que separa uma face- P de uma face- B . Repare-se que as arestas incidentes a u , u' , v ou v' têm essa propriedade, uma vez que qualquer uma delas separa uma margem preta de uma margem branca. Observe-se que, seguindo esta regra, ao partir de um dos vértices de grau 1 nunca ocorre uma troca de cores entre o lado esquerdo e direito de nenhuma aresta.

É importante salientar que o caminho que se obtém aplicando a regra definida é único, pois quando se percorre uma aresta e e chega-se a um vértice w , duas das três faces incidentes ao vértice w são aquelas em que e é a aresta comum, portanto, uma é uma face- P e a outra é uma face- B . A terceira face incidente ao vértice w pode ser uma face- P ou uma face- B , mas, em qualquer caso, há exactamente uma aresta e' que satisfaz a regra definida, como mostra a figura 1.6.

Como o número de vértices do grafo é finito, então a construção do caminho termina desde que não haja repetição de vértices, o que será provado mais à frente. Note-se que só é possível terminar num dos vértices u , u' , v ou v' (excluindo aquele em que se iniciou o caminho) pois estes são os únicos de grau 1. Se, por exemplo, iniciarmos um caminho no vértice u o vértice terminal não pode ser u' pois tal implicaria uma troca de cores entre os lados esquerdo e direito de uma dada aresta.

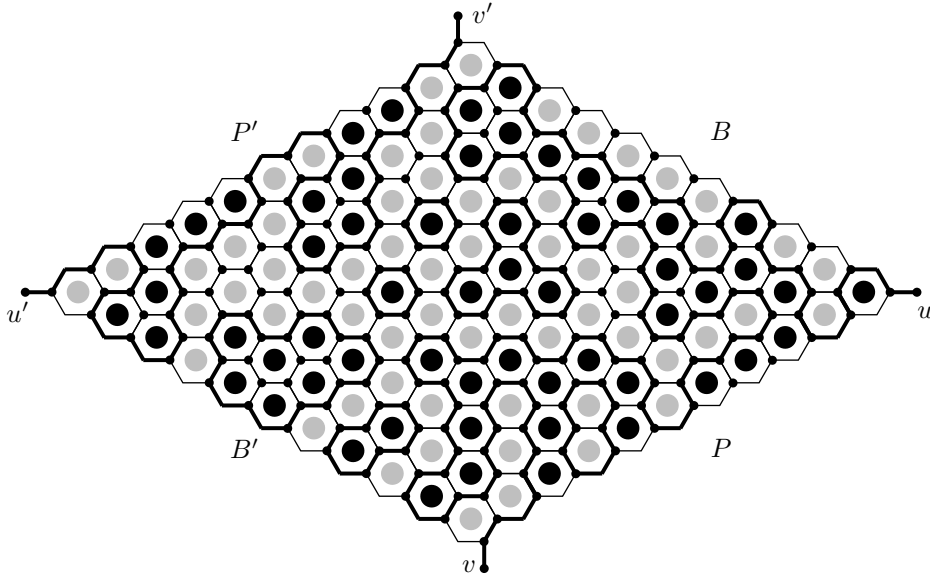


Figura 1.5: Subgrafo Γ' .

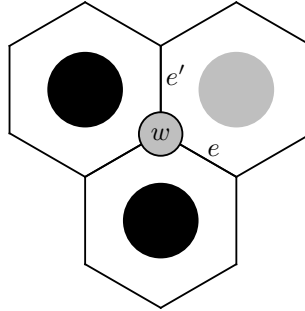


Figura 1.6: Ilustração da construção de um caminho segundo a regra estabelecida.

Assim, se o vértice terminal for v' (v), então o jogador que joga com as peças pretas (brancas) tem um conjunto vencedor, porque existem sempre faces- P (faces- B) contíguas ao caminho entre u e v' (u e v) que ligam P a P' (B a B').

No caso particular da figura 1.5, começando o caminho no vértice u e seguindo a regra anteriormente definida concluímos que o vértice terminal é o vértice v . Como o vértice v é incidente à margem B' então conclui-se que é o jogador que joga com as peças brancas que tem o conjunto vencedor. Para concluir a demonstração falta garantir que no caminho construído não ocorre repetição de vértices. Para tal, seja Γ' o subgrafo de Γ que resulta da supressão das arestas que não separam uma face- P de uma face- B . Repare-se que os vértices de Γ' têm grau 0, caso as três faces incidentes ao vértice tenham todas a mesma cor, ou grau 2, caso uma das três faces incidentes ao vértice tenha cor diferente, excepto os vértices u , u' , v e v' que têm grau 1.

Na Figura 1.5 as arestas destacadas a negrito representam o subgrafo Γ' correspondente ao tabuleiro completamente preenchido da figura 1.4. O subgrafo Γ' é constituído por 6 ciclos, 31 vértices isolados e 2 caminhos: um de u para v e outro de u' para v' .

Assim, pelo lema A.1.1, Γ' é composto por vértices isolados, ciclos e caminhos. Dado que em Γ' existem apenas quatro vértices de grau 1, u , u' , v e v' , então existem apenas dois caminhos que unem pares desses vértices. O caminho que se inicia num desses vértices e que é construído segundo a regra descrita anteriormente é um desses caminhos, logo nunca ocorre repetição de vértices, como queríamos provar.

■

1.4 O Tabuleiro de John Nash

John Nash, em 1948, redescobriu o jogo do Hex, tal como já foi referido na secção 1.2. Nesta secção vamos mostrar que o tabuleiro de Nash e o tabuleiro de Hein são equivalentes.

Para mostrar a equivalência entre os dois tabuleiros começamos por considerar o tabuleiro de Hein e marcamos um ponto no centro de cada hexágono, de seguida unimos por meio de um segmento de recta todos os pontos que pertencem a hexágonos adjacentes, conforme se mostra na figura 1.7.

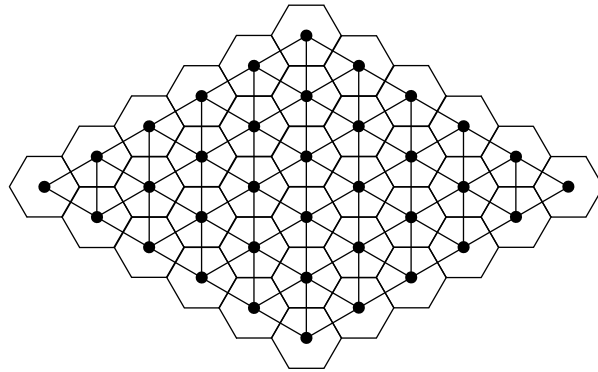


Figura 1.7: Representação da equivalência entre os tabuleiros de Hein e de Nash.

Endireitando (rodando para a direita) o esquema construído sobre o tabuleiro de Hein, obtemos o tabuleiro da figura 1.8.

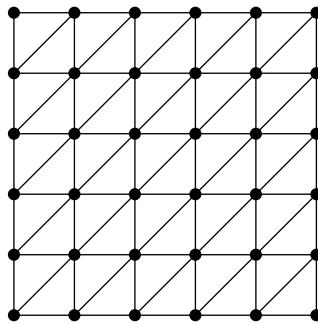


Figura 1.8: Tabuleiro de Nash.

No tabuleiro de Nash os jogadores colocam as peças nos vértices e o objectivo, tal como no tabuleiro de Hein, é construir um caminho que ligue os lados opostos. Neste tabuleiro duas casas (vértices) são consideradas adjacentes se estiverem unidas por uma aresta na horizontal, vertical ou diagonal com inclinação positiva. Não consideramos as diagonais com inclinação negativa porque estas não ligam dois hexágonos adjacentes no tabuleiro de Hein. O tabuleiro de Nash também pode ser visto como o produto cartesiano de grafos. Repare-se que se considerarmos os vértices e as arestas do contorno do lado W como sendo o grafo G_1 e os vértices e as arestas do contorno do lado S como sendo o grafo G_2 , então $G_1 \times G_2$ reunido com toda a aresta que une o vértice (i, j) com o vértice $(i + 1, j + 1)$ com $i, j = 0, \dots, k - 2$, então obtemos um grafo correspondente ao tabuleiro de Nash.

1.5 A Equivalência entre o Teorema do Hex e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Para a demonstração da equivalência entre o Teorema do Hex e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer usaremos o tabuleiro de Nash e a norma $|x| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Vão ser ainda necessárias algumas definições que apresentamos de seguida.

Definição 1.5.1 Para $x \neq y \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y$ se $x_i \leq y_i$ para $i = 1, 2$. Os pontos x e y são chamados de comparáveis se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 1.5.2 O tabuleiro (bidimensional) de Nash de tamanho k , H_k , é um grafo cujos vértices são todos os pontos $z \in \mathbb{Z}^2$ tais que $(0, 0) \leq z \leq (k-1, k-1)$. Dois vértices z e z' são adjacentes, ou seja, existe uma aresta a uni-los em H_k se

$$\begin{cases} |z - z'| = 1, \\ z \text{ e } z' \text{ são comparáveis.} \end{cases}$$

Identifiquemos as arestas do contorno de um tabuleiro H_k com os pontos cardeais N, S, E e W , ou seja:

$$N = \{z \in H_k | z_2 = k - 1\}$$

$$S = \{z \in H_k | z_2 = 0\}$$

$$E = \{z \in H_k | z_1 = k - 1\}$$

$$W = \{z \in H_k | z_1 = 0\}.$$

Na figura 1.9 podemos observar o tabuleiro de Nash de tamanho $k = 6$, H_6 .

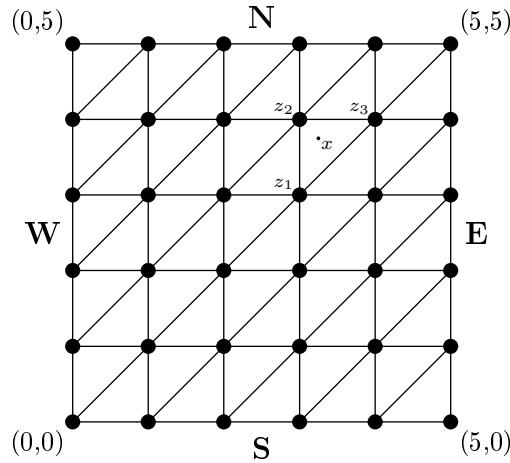


Figura 1.9: Representação gráfica do tabuleiro de Nash de tamanho $k = 6$, H_6 .

Para a nossa demonstração vamos considerar que o jogador que tenta ligar os lados E e W (N e S) do tabuleiro joga com peças brancas (pretas), ou seja, este jogador tenta construir um caminho que ligue E e W (N e S). Designemos por B (P) o subgrafo induzido pelos vértices ocupados por peças brancas (pretas).

De seguida, reescrevemos o Teorema do Hex e vamos provar que este é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 1.5.1 (Teorema do Hex): Considere-se H_k totalmente preenchido e os subgrafos B e P . Então existe um caminho em B que liga E a W ou existe um caminho em P que liga N a S .

Teorema 1.5.2 (*Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*): *Seja $f : I^2 \rightarrow I^2$ uma função contínua. Então existe $x \in I^2$ tal que $f(x) = x$.*

Podemos agora enunciar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 1.5.3 *O Teorema do Hex é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.*

Demonstração: Começemos por mostrar que o Teorema do Hex implica o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Seja $f : I^2 \rightarrow I^2$ uma função contínua. Pelo lema A.2.1, basta mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $x \in I^2$ tal que $|f(x) - x| < \epsilon$. Como toda a função contínua num compacto é uniformemente contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, x' \in I^2$ satisfazem $|x - x'| < \delta$ então $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Seja $0 < \delta_1 < \min\{\delta, \epsilon\}$.

Considere-se o tabuleiro de Nash “adaptado” que resulta da divisão de cada um dos lados de I^2 em k partes iguais, com $\frac{1}{k} < \delta_1$. Desta forma, obtemos um tabuleiro de tamanho $k + 1$ com vértices nos pontos $(\frac{i}{k}, \frac{j}{k})$, com $i, j = 0, \dots, k$. Vamos definir subconjuntos destes vértices P^+, P^-, B^+ e B^- da seguinte forma:

$$P^+ = \{z | f_1(z) - z_1 \geq \epsilon\}$$

$$P^- = \{z | z_1 - f_1(z) \geq \epsilon\}$$

$$B^+ = \{z | f_2(z) - z_2 \geq \epsilon\}$$

$$B^- = \{z | z_2 - f_2(z) \geq \epsilon\},$$

onde f_i denota a i -ésima coordenada de f , com $i = 1, 2$.

Intuitivamente, um vértice z pertence a P^+, P^-, B^+ ou B^- conforme z é movido por f pelo menos ϵ unidades para a direita, esquerda, para cima ou para baixo, respectivamente (ver exemplo 1.5.1). A primeira implicação do teorema ficará demonstrada se conseguirmos mostrar que os quatro subconjuntos não cobrem todos os vértices do tabuleiro, ou seja, existe algum vértice que não está em $P^+ \cup P^- \cup B^+ \cup B^-$. Tal implica que existe um $z \in H_k$ tal que $|f(z) - z| < \epsilon$ e provamos assim que a função f tem um ponto fixo.

Daqui em diante, conforme o contexto, entendemos também um conjunto de vértices como um subgrafo por si gerado.

Os conjuntos P^+ e P^- (B^+ e B^-) são disjuntos e $P^+ \cup P^-$ ($B^+ \cup B^-$) é não conexo.

Supondo que $P^+ \cup P^-$ é conexo, então existem $z \in P^+$ e $z' \in P^-$ adjacentes.

Como $z \in P^+$,

$$f_1(z) - z_1 \geq \epsilon \tag{1.1}$$

e, como $z' \in P^-$,

$$z'_1 - f_1(z') \geq \epsilon. \tag{1.2}$$

Adicionando 1.1 e 1.2 obtemos

$$f_1(z) - f_1(z') + z'_1 - z_1 \geq 2\epsilon. \tag{1.3}$$

Mas

$$z'_1 - z_1 \leq \frac{1}{k} \Rightarrow z'_1 - z_1 < \delta \text{ (porque } \frac{1}{k} < \delta_1 < \delta).$$

Mas como $\delta < \epsilon$ então

$$z'_1 - z_1 < \epsilon. \quad (1.4)$$

Assim, multiplicando 1.4 por (-1) obtemos

$$z_1 - z'_1 > -\epsilon. \quad (1.5)$$

Somando 1.3 e 1.5 obtemos

$$f_1(z) - f_1(z') > \epsilon.$$

Mas pela norma que estamos a utilizar podemos escrever

$$|f(z) - f(z')| > \epsilon,$$

o que contradiz a definição de continuidade uniforme. Logo z e z' não são adjacentes. Assim, podemos concluir que $P^+ \cup P^-$ não é conexo. De modo análogo, podemos concluir que $B^+ \cup B^-$ não é conexo.

Sejam $P = P^+ \cup P^-$ e S um subgrafo conexo com vértices em P . A conexidade de S implica que $S \subset P^+$ ou $S \subset P^-$. Além disso, pela forma como a função f está definida, tem-se que nenhum ponto de E pode ser movido por f para a direita, assim como nenhum ponto de W pode ser movido por f para a esquerda, então, conclui-se que $P^+ \cap E = \emptyset$ e que $P^- \cap W = \emptyset$. Portanto, S não se intersecta com E nem com W , ou seja, P não contém um conjunto conexo que ligue E e W .

Através de um raciocínio análogo, pode-se concluir que $B = B^+ \cup B^-$ não contém um conjunto conexo que ligue N e S . Então, pelo Teorema do Hex, podemos concluir que os conjuntos P e B não cobrem todos os vértices do tabuleiro de Nash “adaptado”, logo $\exists z \notin P \cup B$, o que implica que $|f(z) - z| < \epsilon$, completando assim a primeira parte da demonstração.

Para demonstrar a segunda implicação, ou seja, que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer implica o Teorema do Hex vamos usar o facto de qualquer ponto $x \in [0, k-1]^2$ poder ser expresso como uma combinação linear convexa única de um conjunto de no máximo três vértices adjacentes dois a dois. Esses vértices são os dos triângulos de menor dimensão da figura 1.9. Para cada ponto $x = (x_1, x_2) \in [0, k-1]^2$ escolhe-se o conjunto de vértices mutuamente adjacentes do invólucro convexo a que x pertence. Na figura 1.9 o ponto $x \in [3, 4]^2$ está no invólucro convexo de z_1, z_2 e z_3 , logo existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$, com $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ tais que $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$.

Vamos precisar ainda de usar o facto de que qualquer função f de H_k em \mathbb{R}^2 pode ser estendida a uma função contínua \hat{f} , linear por troços, definida em $[0, k-1]^2$ da seguinte forma: para $x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$, $\hat{f}(x) = \lambda_1 f(z^1) + \lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3)$.

Estamos agora em condições de iniciar a demonstração da segunda implicação. Vamos fazê-lo por absurdo, ou seja, vamos supor que o tabuleiro H_k está completamente preenchido e que não existe um caminho em B que ligue E a W nem um caminho em P que ligue N a S . Começamos por definir quatro subconjuntos da seguinte forma:

Seja \widehat{W} (\widehat{S}) o conjunto de todos os vértices do tabuleiro que estão ligados a W (S) por um caminho em B (P), ou seja, por um caminho formado por vértices ocupados por peças brancas (pretas) e seja $\widehat{E} = B - \widehat{W}$ ($\widehat{N} = P - \widehat{S}$).

Pela forma como os quatro subconjuntos foram definidos podemos concluir que o subgrafo $\widehat{W} \cup \widehat{E}$ não é conexo e o mesmo acontece com o subgrafo $\widehat{N} \cup \widehat{S}$.

Sejam e^1 e e^2 os vectores unitários de \mathbb{R}^2 e defina-se a função f em H_k , do seguinte modo:

$$f(z) = \begin{cases} z + e^1 & \text{se } z \in \widehat{W}, \\ z - e^1 & \text{se } z \in \widehat{E}, \\ z + e^2 & \text{se } z \in \widehat{S}, \\ z - e^2 & \text{se } z \in \widehat{N}. \end{cases}$$

Pela forma como a função f está definida podemos concluir que, para cada uma das quatro possibilidades, $f(z)$ está sempre em H_k . Por exemplo, usando o primeiro ramo de f , o ponto $z + e^1 \in H_k$ porque caso contrário z pertencia a E , significando isto a existência de um caminho em B a ligar W a E , contradizendo a hipótese inicial. Observe-se também que $\widehat{E} \cap W = \emptyset$ porque, em B , \widehat{E} e \widehat{W} são complementares, logo $z - e^1 \in H_k$. Fazendo um raciocínio análogo pode-se concluir que, para os outros dois ramos da função, $f(z)$ está sempre em H_k .

Seja \widehat{f} a extensão da função f a todos os pontos de $[0, k-1]^2$ definida anteriormente. Vamos obter uma contradição porque \widehat{f} é contínua e prova-se que não tem ponto fixo.

Como verificámos anteriormente, $\widehat{W} \cup \widehat{E}$ e $\widehat{N} \cup \widehat{S}$ não são conexos. Tal implica que, se considerarmos três vértices de um triângulo qualquer (de vértices mutuamente adjacentes) então nunca acontece que a esses três vértices sejam aplicados três ramos diferentes da função, pois não é possível que um desses vértices pertença a \widehat{W} e outro a \widehat{E} nem que um pertença a \widehat{S} e outro a \widehat{N} uma vez que $\widehat{W} \cup \widehat{E}$ e $\widehat{N} \cup \widehat{S}$ não são conexos. Portanto, conclui-se que os três vértices só podem ser movidos por um dos seguintes pares de vectores: e^1 e e^2 , ou e^1 e $-e^2$, ou $-e^1$ e e^2 ou ainda $-e^1$ e $-e^2$. Como estes vectores não têm o zero no seu invólucro convexo, aplicando o lema A.2.2, concluimos que a função \widehat{f} não tem um ponto fixo, o que contradiz o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Logo, podemos concluir que num tabuleiro completamente preenchido existe um caminho em B a ligar W e E ou um caminho em P a ligar N e S . ■

De seguida apresenta-se um exemplo de modo a clarificar a construção dos conjuntos P^+ , P^- , B^+ e B^- , bem como o conceito de combinação linear convexa utilizados na demonstração anterior.

Exemplo 1.5.1 *Seja $f : I^2 \rightarrow I^2$ a função definida por $f(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2)$. Para $\epsilon = 0,5$ escolhendo $\delta = 0,5$ verifica-se a definição de continuidade uniforme para f . Como $\frac{1}{k} < \delta_1 < \min\{\delta, \epsilon\}$ então devemos escolher $k > 2$. Seja $k = 4$, isto é, vamos considerar um tabuleiro de Nash ‘adaptado’ de tamanho $k = 4$ como ilustrado na figura 1.10, à esquerda.*

Para poder definir os subconjuntos P^+ , P^- , B^+ e B^- vamos começar por calcular a imagem de cada um dos vértices do tabuleiro, a a p através da função f :

$f(a) = f(0, 0) = (1, 1)$	$f(g) = f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$f(l) = f(1, \frac{2}{3}) = (0, \frac{1}{3})$
$f(b) = f(\frac{1}{3}, 0) = (\frac{2}{3}, 1)$	$f(h) = f(1, \frac{1}{3}) = (0, \frac{2}{3})$	$f(m) = f(0, 1) = (1, 0)$
$f(c) = f(\frac{2}{3}, 0) = (\frac{1}{3}, 1)$	$f(i) = f(0, \frac{2}{3}) = (1, \frac{1}{3})$	$f(n) = f(\frac{1}{3}, 1) = (\frac{2}{3}, 0)$
$f(d) = f(1, 0) = (0, 1)$	$f(j) = f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$f(o) = f(\frac{2}{3}, 1) = (\frac{1}{3}, 0)$
$f(e) = f(0, \frac{1}{3}) = (1, \frac{2}{3})$	$f(k) = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$f(p) = f(1, 1) = (0, 0)$
$f(f) = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$		

Na figura 1.10 pode-se observar a transformação de cada um dos vértices por meio da função f dada.

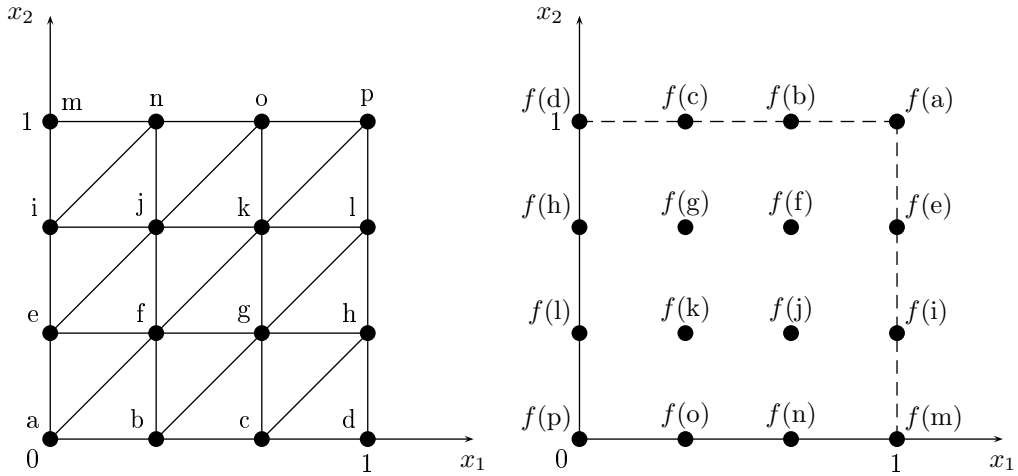


Figura 1.10: Tabuleiro de Nash “adaptado” de tamanho $k = 4$, à esquerda e a imagem dos respectivos vértices à direita.

Podemos então concluir que os subconjuntos P^+ , P^- , B^+ e B^- são:

$$P^+ = \left\{ (0, 0); \left(0, \frac{1}{3}\right); \left(0, \frac{2}{3}\right); (0, 1) \right\}$$

$$P^- = \left\{ (1, 0); \left(1, \frac{1}{3}\right); \left(1, \frac{2}{3}\right); (1, 1) \right\}$$

$$B^+ = \left\{ (0, 0); \left(\frac{1}{3}, 0\right); \left(\frac{2}{3}, 0\right); (1, 0) \right\}$$

$$B^- = \left\{ (0, 1); \left(\frac{1}{3}, 1\right); \left(\frac{2}{3}, 1\right); (1, 1) \right\}$$

Na figura 1.11 podemos observar a representação dos subconjuntos P^+ , P^- , B^+ e B^- .

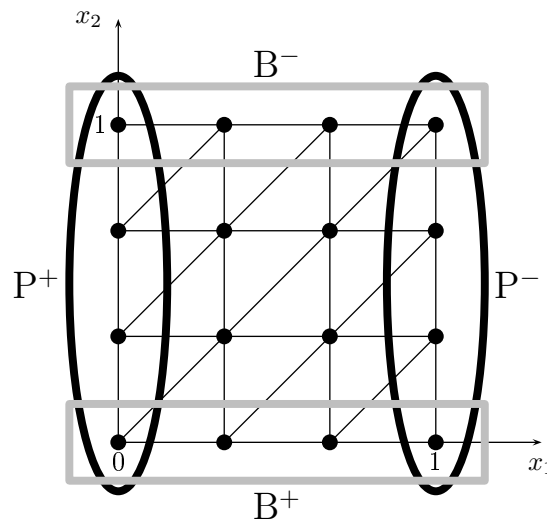


Figura 1.11: Representação dos subconjuntos P^+ , P^- , B^+ e B^- .

Sejam $P = P^+ \cup P^-$ e $B = B^+ \cup B^-$. Observando a figura 1.11 podemos verificar que P e B não são

conexos e que $P \cup B$ não cobre o conjunto de todos os vértices do tabuleiro pois $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ não pertencem a $P \cup B$. Repare-se que para estes vértices verifica-se que $|f(z) - z| < 0,5$. Vamos ainda exemplificar que um ponto $x \in I^2$ pode ser escrito como uma combinação linear convexa única de um conjunto de no máximo três vértices, mutuamente adjacentes. Considerando o ponto $x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$, escolhemos os vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Então x pode ser escrito como uma combinação linear convexa única desses três vértices do seguinte modo:

$$x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}) = \frac{2}{8} (0,0) + \frac{3}{8} (\frac{1}{3}, 0) + \frac{3}{8} (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

Capítulo 2

O Hex de Dimensão n

O jogo do Hex de dimensão n , para n jogadores, não é atractivo nem se reveste de grande interesse quer no que se refere à teoria dos jogos quer do ponto de vista do jogo propriamente dito. Podem-se encontrar diversas dificuldades, que vão desde a dificuldade da construção de um tabuleiro em que seja prático múltiplos jogadores jogarem, até ao facto de não haver regras claras e específicas sobre quem ganha e quem perde.

Ao longo deste capítulo, não é relevante qual a regra que permite determinar o vencedor, mas sim o facto de que é possível construir pelo menos um caminho que ligue duas faces opostas.

A demonstração de que o Teorema do Hex de dimensão n é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer pode ser obtida através de uma generalização da demonstração para a dimensão dois apresentada no capítulo anterior. À semelhança do capítulo anterior, a demonstração do Teorema do Hex para a dimensão n também foi elaborada com base no artigo de David Gale [1].

Ao longo deste capítulo, apresentar-se-ão exemplos para o caso $n = 3$ com vista a uma melhor compreensão e visualização.

2.1 O Tabuleiro de Hex

A definição do tabuleiro de Hex de dimensão n , apresentada a seguir, é uma generalização da definição 1.5.2 do tabuleiro (bidimensional) de Nash, apresentada no capítulo anterior.

Definição 2.1.1 *O tabuleiro de Hex de dimensão n e tamanho k , H_k^n , é um grafo cujos vértices são todos os pontos $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ tais que $1 \leq z_i \leq k, i = 1, \dots, n$. Dois vértices z e z' são adjacentes se*

$$|z - z'| = 1$$

e

z e z' são comparáveis (ou seja, $z_i \leq z'_i$, para todo o $i = 1, \dots, n$, ou $z'_i \leq z_i$, para todo o $i = 1, \dots, n$).

Para simplificar a notação, daqui para a frente passaremos a denotar H_k^n simplesmente por H . Para cada $i = 1, \dots, n$, as faces de H são definidas do seguinte modo:

$$H_i^- = \{z \in H | z_i = 1\}$$

e

$$H_i^+ = \{z \in H | z_i = k\}.$$

Consideremos que os n jogadores não têm peças coloridas, mas sim peças numeradas e que o jogador- i é aquele que joga com a peça i , com $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$. Então podemos definir a função L definida de H para $N = \{1, 2, \dots, n\}$ que associa a cada vértice o número da peça, rótulo, nele colocada.

Considerando que o jogador- i , com $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, ganhou o jogo então $L^{-1}(\{i\})$ permite-nos determinar um caminho em H que liga as duas faces opostas do jogador- i . Tal caminho, daqui para a frente, será designado por conjunto- i vencedor.

2.2 O Teorema do Hex

Antes de enunciar o Teorema do Hex de dimensão n vamos apresentar algumas definições e resultados teóricos necessários para a sua demonstração.

Começemos por definir o tabuleiro de Hex aumentado, \widehat{H} , como sendo formado por todos os vértices $z \in \mathbb{Z}^n$, com $0 \leq z_i \leq k+1$, $i = 1, \dots, n$, e definimos ainda as faces de \widehat{H} do seguinte modo:

$$\widehat{H}_i^- = \{z \in \widehat{H} | z_i = 0\}$$

e

$$\widehat{H}_i^+ = \{z \in \widehat{H} | z_i = k+1\},$$

com $i = 1, \dots, n$.

Seja e^i o i -ésimo vector unitário em \mathbb{R}^n e seja $e \in \mathbb{R}^n$ o vector cujas coordenadas são todas iguais a 1, ou seja, $e = (1, \dots, 1)$.

De seguida apresentamos a definição de simplex, uma das definições mais importantes para esta secção.

Definição 2.2.1 *Um simplex de \mathbb{R}^n (n -simplex) é um tuplo $\sigma = (z^0, \dots, z^n)$ de $(n+1)$ vértices, onde $z^i \in \mathbb{Z}^n$, com $i = 0, \dots, n$, tal que*

$$z^{i+1} - z^i = e^r \text{ para algum } r \in N \text{ e } i = 0, \dots, n-1$$

e

$$z^{i+1} - z^i \neq z^{j+1} - z^j \text{ para } i, j = 0, \dots, n, \text{ com } i \neq j.$$

Dito de outra forma, um simplex é um tuplo de vértices tais que para se obter o vértice seguinte se adiciona um vector unitário ao vértice anterior e num mesmo simplex nunca se adicionam dois vectores unitários iguais.

Exemplo 2.2.1 *Consideremos, para $n = 3$, o tuplo $\sigma_0 = (0, e^1, e^1 + e^2, e)$. Estes vértices verificam a definição 2.2.1, então σ_0 é um simplex de \mathbb{R}^3 . Na figura 2.1 podemos observar a representação deste simplex.*

Como veremos, um simplex importante ao longo desta secção é o simplex $\sigma_0 = (0, e^1, e^1 + e^2, \dots, e)$. Como podemos verificar pela definição 2.1.1, quaisquer dois vértices de um simplex em \widehat{H} são adjacentes.

Se a um simplex $\sigma = (z^0, \dots, z^n)$ retirarmos um vértice obtemos um tuplo de n vértices que designaremos por faceta, definida da seguinte forma:

Definição 2.2.2 *Chamamos faceta- i do simplex σ ao tuplo de n vértices, $\tau^i = (z^0, \dots, z^{i-1}, z^{i+1}, \dots, z^n)$, com $i = 0, \dots, n$.*

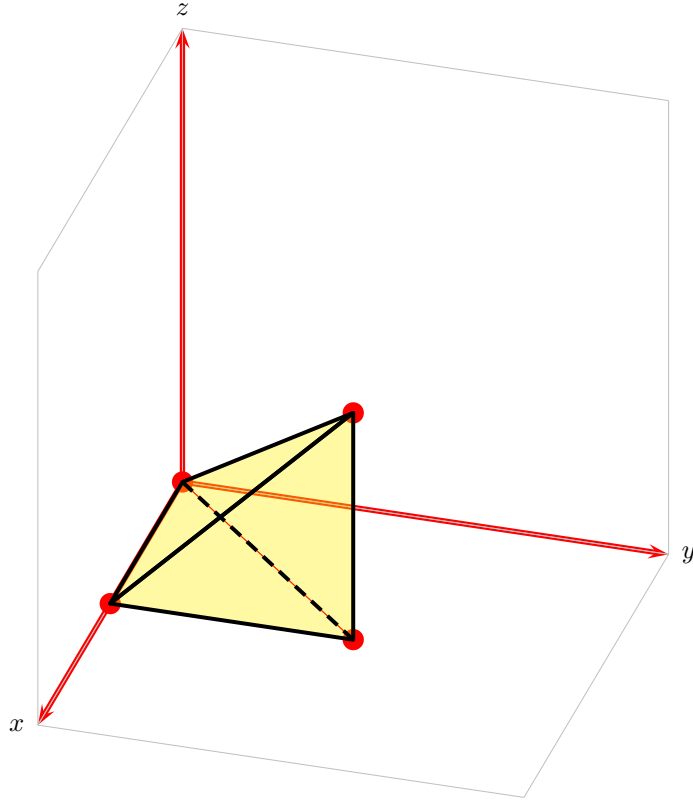


Figura 2.1: Representação do simplex σ_0 .

Considerando o simplex $\sigma_0 = (0, e^1, e^1 + e^2, \dots, e)$ a faceta-0 vai ser $\tau^0 = (e^1, e^1 + e^2, \dots, e)$, a faceta-1 vai ser $\tau^1 = (0, e^1 + e^2, \dots, e)$ e assim sucessivamente. Repare-se que $\tau^n = (0, e^1, e^1 + e^2, \dots, e^{n-1})$ pertence a \widehat{H}_n^- .

Para a demonstração que pretendemos construir precisamos ainda definir simplexes vizinhos.

Definição 2.2.3 O vizinho- i de $\sigma = (z^0, \dots, z^i, \dots, z^n)$, para $0 < i < n$, é o simplex $\tilde{\sigma}^i$ cujos vértices são os mesmos de σ excepto z^i , que é substituído por $\tilde{z}^i = z^{i-1} - z^i + z^{i+1}$. O vértice \tilde{z}^i é chamado o companheiro de z^i em relação a σ .

Repare-se que de facto $\tilde{\sigma}^i$ satisfaz a definição 2.2.1 como mostramos de seguida.

Seja $\sigma = (z^0, \dots, z^{i-1}, z^i, z^{i+1}, \dots, z^n)$, então como σ é um simplex podemos escrever que

$$z^i = z^{i-1} + e^r \quad (2.1)$$

e que

$$z^{i+1} = z^i + e^s, \quad (2.2)$$

com $r \neq s$.

Então, usando 2.1 temos que

$$\begin{aligned} \tilde{z}^i &= z^{i-1} - z^i + z^{i+1} \\ &= z^{i-1} - z^{i-1} - e^r + z^{i+1} \\ &= z^{i+1} - e^r \end{aligned}$$

e usando 2.2 temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{z}^i &= z^{i-1} - z^i + z^{i+1} \\
&= z^{i-1} - z^i + z^i + e^s \\
&= z^{i-1} + e^s.
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\tilde{\sigma}^i$ satisfaz a definição 2.2.1. $\tilde{\sigma}^i$ satisfaz também a propriedade de simetria, ou seja, $\tilde{\sigma}^i$ é o vizinho- i de σ se e somente se σ é o vizinho- i de $\tilde{\sigma}^i$ e que σ e $\tilde{\sigma}^i$ se intersectam na faceta- i comum a ambos, ou seja, $\sigma \cap \tilde{\sigma}^i = \tau^i$.

Definição 2.2.4 Ao tuplo $\tilde{\sigma}^0 = (z^1, \dots, z^n, \tilde{z}^0)$ chamamos vizinho-0 de $\sigma = (z^0, \dots, z^n)$, onde $\tilde{z}^0 = z^1 - z^0 + z^n$, e ao tuplo $\tilde{\sigma}^n = (\tilde{z}^n, z^0, \dots, z^{n-1})$ chamamos vizinho- n de σ , onde $\tilde{z}^n = z^{n-1} - z^n + z^0$. Também neste caso, z^0 e \tilde{z}^0 , bem como z^n e \tilde{z}^n , são chamados companheiros.

Note-se que a construção de $\tilde{\sigma}^0$ e $\tilde{\sigma}^n$ conduz-nos também a simplexes e que, se $\tilde{\sigma}^0$ é o vizinho-0 de σ , então σ é o vizinho- n de $\tilde{\sigma}^0$ e $\sigma \cap \tilde{\sigma}^0$ é a faceta-0 de σ e a faceta- n de $\tilde{\sigma}^0$.

Exemplo 2.2.2 Consideremos novamente o simplex σ_0 para $n = 3$ representado na figura 2.1. Aplicando as definições anteriores, os vizinhos- i de σ_0 , com $i = 0, \dots, 3$ são:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_0^1 &= ((0, 0, 0); (0, 1, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)), \\
\tilde{\sigma}_0^2 &= ((0, 0, 0); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 1)), \\
\tilde{\sigma}_0^0 &= ((1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (2, 1, 1)) \text{ e} \\
\tilde{\sigma}_0^3 &= ((0, 0, -1); (0, 0, 0); (1, 0, 0); (1, 1, 0)).
\end{aligned}$$

Neste caso $\tilde{\sigma}_0^3$ não pertence a \hat{H} , como se pode observar na figura 2.2.

Prolonguemos a função L a \hat{H} definindo-a nas faces de \hat{H} do seguinte modo:

$$\hat{L}(z) = \begin{cases} \min\{i | z \in \hat{H}_i^-\} & \text{se } z \in \bigcup_{i=1}^n \hat{H}_i^-, \\ \min\{i | z \in \hat{H}_i^+\} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.3)$$

A função \hat{L} definida para as faces de \hat{H} não depende da função L definida em H e pode-se concluir que se $z = (z_1, \dots, z_n) \in \bigcup_{i=1}^n \hat{H}_i^-$, $\hat{L}(z) = i$, sendo i o menor índice das coordenadas nulas. Analogamente, se $z = (z_1, \dots, z_n) \notin \bigcup_{i=1}^n \hat{H}_i^-$, então $\hat{L}(z) = i$, onde i é o menor dos índices das coordenadas de valor igual a $(k + 1)$.

Exemplo 2.2.3 Consideremos novamente o simplex σ_0 da figura 2.1. Os rótulos assinalados com * na tabela 2.1 dependem da função L . Estes rótulos resultam apenas das peças que ao longo do jogo se vão colocando nestes vértices. Os restantes valores dos rótulos obtêm-se através do prolongamento da função L .

Definição 2.2.5 Um simplex σ diz-se completamente rotulado, se a restrição $\hat{L}|_\sigma : \sigma \rightarrow N$ for sobrejectiva. Define-se faceta completamente rotulada de forma análoga.

O simplex σ_0 e a sua faceta- n , $\tau^n = (z^0, \dots, z^{n-1})$, são completamente rotulados uma vez que, por 2.3, os vértices de τ^n têm rótulos $1, 2, \dots, n$.

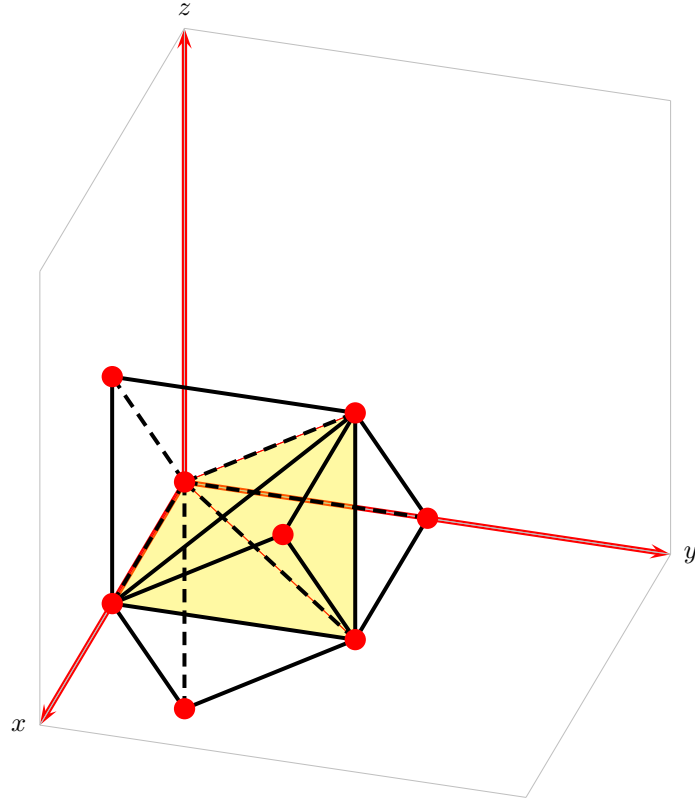


Figura 2.2: Representação do simplex σ_0 e dos seus vizinhos.

Tabela 2.1: Vizinhos de σ_0 , facetas em comum com σ_0 e rótulos dos respectivos vértices.

Vizinhos de σ_0	Faceta em comum com σ_0	Rótulos
$\tilde{\sigma}_0^1 = ((0, 0, 0); (0, 1, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1))$	Faceta-1	$(1, 1, 3, 1^*)$
$\tilde{\sigma}_0^2 = ((0, 0, 0); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 1))$	Faceta-2	$(1, 2, 2, 1^*)$
$\tilde{\sigma}_0^0 = ((1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (2, 1, 1))$	Faceta-3	$(2, 3, 1^*, 1^*)$

Definição 2.2.6 Seja Γ o grafo cujos vértices são os simplexes completamente rotulados em \hat{H} . Dois vértices σ e $\tilde{\sigma}$ são adjacentes se são vizinhos e se a sua faceta em comum é completamente rotulada.

Lema 2.2.1 Cada vértice σ de Γ tem no máximo grau 2.

Demonstração: Seja $\sigma = (z^0, \dots, z^n)$ completamente rotulado. Logo, existem exactamente dois vértices z^i e z^j com o mesmo rótulo. Então qualquer faceta diferente de τ^i e τ^j não é completamente rotulada. Consequentemente, o grau de σ é no máximo 2. ■

Lema 2.2.2 O simplex σ_0 tem exactamente um vizinho completamente rotulado, ou seja, o grau de σ_0 é 1.

Demonstração: Dado que o vértice e é sempre um dos que tem rótulo repetido, comecemos por verificar se $\tilde{\sigma}_0^n$ é adjacente a σ_0 . Como $\tilde{\sigma}_0^n = (-e^n, 0, \dots, e^1 + \dots + e^{n-1})$, então $\tilde{\sigma}_0^n \notin \hat{H}$, logo $\tilde{\sigma}_0^n$ não é adjacente a σ_0 .

Seja $L(e) = i$. Então o outro vértice de σ_0 com o mesmo rótulo é $\sum_{j=0}^{i-1} e^j$ (assumindo que $e^0 = (0, \dots, 0)$).

Se $i > 1$, o companheiro de $\sum_{j=0}^{i-1} e^j$ é $e^1 + \dots + e^{i-2} + e^i$, que pertence a \widehat{H} . Portanto, neste caso σ_0 tem apenas um vizinho completamente rotulado.

Se $i = 1$, então o outro vértice com rótulo 1 é o vértice 0 e o vizinho-0 de σ_0 é $(e^1, e^1 + e^2, \dots, e, e^1 + e)$ que é completamente rotulado e pertence a \widehat{H} . ■

Como pelo lema 2.2.1 cada vértice σ de Γ tem no máximo grau 2, então podemos aplicar o lema A.1.1 e, uma vez que pelo lema 2.2.2 σ_0 tem grau 1, então podemos concluir que σ_0 é o vértice inicial de um caminho $P = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

São ainda necessários os dois lemas seguintes para demonstrar o resultado principal desta secção.

Lema 2.2.3 *Sejam $P = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$ um caminho sobre Γ e $\tau^n = (z^0, \dots, z^{n-1})$ a faceta- n de σ_m . Se τ^n é completamente rotulada e está contida em \widehat{H}_n^- , então τ^n coincide com a faceta- n de σ_0 .*

Demonstração: Começemos por provar que $z^0 = 0$. Suponhamos que $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) > 0$, então $z_r^0 > 0$ para algum $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Note-se que se $\tau^n \in \widehat{H}_n^-$ então $z_n^i = 0$, para $i = 0, \dots, n-1$. Mas se a coordenada r de z^0 é maior que zero então a coordenada r de z^i é maior que zero para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$, pois pela definição 2.2.1 sabemos que $z^{i+1} = z^i + e^r$, logo podemos concluir que τ^n não tem nenhum vértice com rótulo r e deste modo τ^n não seria completamente rotulada. Mas por hipótese τ^n é completamente rotulada, logo, concluímos que $z^0 = 0$.

Do mesmo modo podemos concluir que $z^1 = e^1$, pois se z^1 fosse um qualquer vector unitário diferente de e^1 então nenhum vértice de τ^n teria rótulo 2. O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que $z^2 - z^1 = e^2$ e assim sucessivamente.

Deste modo fica provado que a faceta- n de σ_m é igual à faceta- n de σ_0 , ou seja, $\tau^n = (0, e^1, \dots, e^1 + \dots + e^{n-1})$. ■

Lema 2.2.4 *Para um qualquer caminho $P = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$, uma das facetas completamente rotuladas de σ_m está contida em alguma face \widehat{H}_i^+ de \widehat{H} .*

Demonstração: Seja $\sigma_m = (z^0, \dots, z^n)$. Para provarmos que uma das facetas completamente rotuladas de σ_m está contida em alguma face \widehat{H}_i^+ de \widehat{H} , vamos usar o facto de σ_{m-1} ser o único vizinho completamente rotulado de σ_m . Então, para algum i , existe um vértice z^i cujo companheiro \tilde{z}^i não pertence a \widehat{H} . Esse vértice só pode ser z^0 ou z^n porque para $0 < i < n$, \tilde{z}^i verifica $z^{i-1} < \tilde{z}^i < z^{i+1}$ e como z^{i-1} e z^{i+1} pertencem a \widehat{H} então \tilde{z}^i também pertence a \widehat{H} .

Suponhamos agora que o vizinho- n de σ_m não está contido em \widehat{H} . Logo $\tilde{z}^n = z^0 - z^n + z^{n-1}$ não pertence a \widehat{H} . Mais uma vez pela definição 2.2.1, $z^n - z^{n-1} = e^r$, então, para algum $r \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{z}^n &= z^0 - z^n + z^{n-1} \\ &= z^0 - (z^n - z^{n-1}) \\ &= z^0 - e^r. \end{aligned}$$

Logo, para que $\tilde{z}^n \notin \widehat{H}$ a coordenada r de z^0 é igual a zero e assim a coordenada r de \tilde{z}^n será negativa. Mas, mais uma vez pela definição 2.2.1, a coordenada r de z^i é igual a zero, para $i = 0, \dots, n-1$, logo podemos concluir que a faceta- n , τ^n , de σ_m está contida em \widehat{H}_r^- . Mas, por 2.3, τ^n só pode ter rótulos i para $i \leq r$, assim, uma vez que τ^n é completamente rotulada, tem-se

que $r = n$ e portanto τ^n está contida em \widehat{H}_n^- . Aplicando o lema 2.2.3 podemos concluir que a faceta- n de σ_m coincide com a faceta- n de σ_0 , o que implica que P seria um ciclo, contradizendo a hipótese de P ser um caminho. Logo o vizinho- n de σ_m está contido em \widehat{H} . Suponhamos agora que σ_m não tem vizinho-0, então $\tilde{z}^0 = z^1 - z^0 + z^n \notin \widehat{H}$. Mas pela definição 2.2.1 sabe-se que $z^1 - z^0 = e^r$ para algum $r \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\begin{aligned}\tilde{z}^0 &= z^1 - z^0 + z^n \\ &= e^r + z^n.\end{aligned}$$

Logo, para que $\tilde{z}^0 \notin \widehat{H}$ a coordenada r de z^n é igual a $k + 1$. Mas, uma vez mais pela definição 2.2.1, a coordenada r de z^i é igual a $k + 1$ para todo o $i = 1, \dots, n$. Portanto, pode-se concluir que a faceta-0 de σ_m está contida em \widehat{H}_r^+ . ■

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o Teorema do Hex.

Teorema 2.2.1 (*Teorema do Hex*) *Para qualquer função L de H para N existe pelo menos um $i \in N$ tal que $L^{-1}(\{i\})$ contém um conjunto- i vencedor que liga H_i^- e H_i^+ .*

Demonstração: Consideremos o caminho $P = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$. O vértice $\sum_{k=0}^i e^k$, com $i = 0, \dots, n - 1$, tem rótulo $i + 1$ e pertence a \widehat{H}_{i+1}^- . Pelo Lema 2.2.4 concluímos que σ_m tem uma faceta completamente rotulada contida em \widehat{H}_i^+ , logo, tem um vértice com rótulo i que pertence a \widehat{H}_i^+ , para algum $i = 1, \dots, n$.

Então podemos concluir que existe um caminho que liga duas faces opostas, ou seja, podemos concluir que existe um vencedor. Esse vencedor fica determinado através dos vértices cujo rótulo é igual ao índice da face atingida pelo caminho P . Estes vértices pertencem ao caminho que liga faces opostas \widehat{H}_i^- e \widehat{H}_i^+ , para algum $i = 1, \dots, n$, ficando assim provado o Teorema do Hex. ■

2.3 Conjunto- i vencedor

Partindo da demonstração apresentada na secção anterior é possível construir um algoritmo que permite encontrar um conjunto- i vencedor.

De seguida apresenta-se o referido algoritmo, passo por passo, partindo do simplex σ_0 .

1. Verifica-se o rótulo do vértice e .

Seja $L(e) = i + 1$, para algum $i = 0, \dots, n - 1$. Então calcula-se o vizinho- i de σ_0 , $\tilde{\sigma}_0^i$, e designa-se o novo simplex por σ_1 .

2. Verifica-se o rótulo de \tilde{z}^i .

No simplex σ_1 há exactamente um outro vértice com o mesmo rótulo de \tilde{z}^i , pois a faceta- i de σ_0 é completamente rotulada. Substitui-se aquele vértice pelo seu companheiro e designa-se o novo simplex por σ_2 . Analisando os dois vértices de σ_2 que têm o mesmo rótulo, o procedimento repete-se até encontrar um simplex que tenha uma faceta completamente rotulada contida em \widehat{H}_i^+ , para algum $i = 1, \dots, n$.

O conjunto- i vencedor é formado por todos os vértices com rótulo i em cada um dos simplexes, onde i corresponde ao índice da face atingida no final do algoritmo.

Exemplo 2.3.1 Para exemplificar a aplicação do algoritmo, consideremos o tabuleiro de Nash de dimensão 3 e tamanho 3 da figura 2.3, preenchido de forma aleatória e o simplex $\sigma_0 = (0, e^1, e^1 + e^2, e^1 + e^2 + e^3)$.

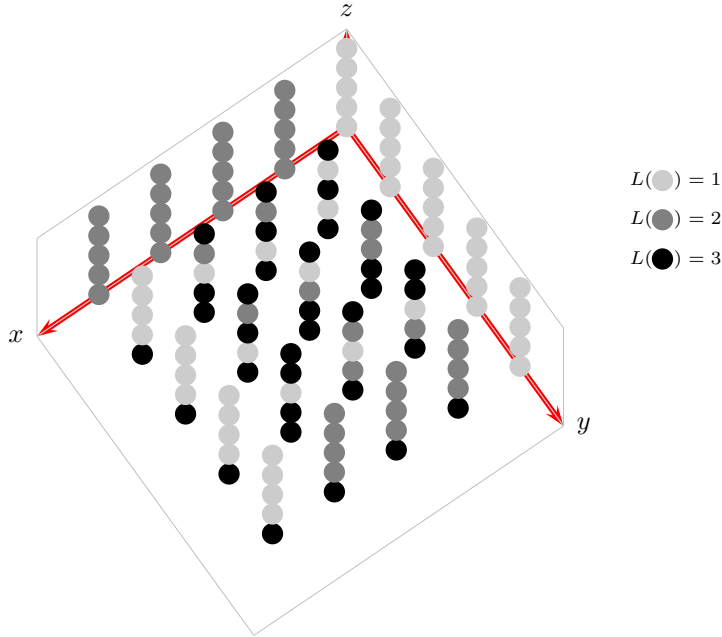


Figura 2.3: Tabuleiro preenchido de forma aleatória em H_3^3 . Os restantes vértices de \hat{H} respeitam a regra \hat{L} .

1º Passo: Começamos por verificar o rótulo do vértice $(1, 1, 1)$. Como $L(1, 1, 1) = 1$, então vamos calcular o vizinho-0 de σ_0 e designamos o novo simplex por σ_1 .

Portanto, $\sigma_1 = ((1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (2, 1, 1))$.

2º Passo: Verificamos o rótulo de \tilde{z}^0 . Como $L(\tilde{z}^0) = 1$ e o outro vértice de σ_1 com rótulo 1 é o vértice $(1, 1, 1)$, então substituímos este vértice pelo seu companheiro, ou seja, calculamos o vizinho-2 de σ_1 obtendo $\sigma_2 = ((1, 0, 0); (1, 1, 0); (2, 1, 0); (2, 1, 1))$. Note-se que os rótulos dos vértices de σ_2 são respectivamente 2, 3, 3 e 1.

Repetindo o procedimento sucessivamente, obtemos os seguintes simplexes:

$$\sigma_3 = ((1, 0, 0); (2, 0, 0); (2, 1, 0); (2, 1, 1))$$

$$\sigma_4 = ((2, 0, 0); (2, 1, 0); (2, 1, 1); (3, 1, 1))$$

$$\sigma_5 = ((2, 0, 0); (2, 0, 1); (2, 1, 1); (3, 1, 1))$$

$$\sigma_6 = ((2, 0, 1); (2, 1, 1); (3, 1, 1); (3, 1, 2))$$

$$\sigma_7 = ((2, 0, 1); (3, 0, 1); (3, 1, 1); (3, 1, 2))$$

$$\sigma_8 = ((3, 0, 1); (3, 1, 1); (3, 1, 2); (4, 1, 2))$$

$$\sigma_9 = ((3, 0, 1); (3, 1, 1); (4, 1, 1); (4, 1, 2))$$

$$\sigma_{10} = ((3, 0, 0); (3, 0, 1); (3, 1, 1); (4, 1, 1))$$

$$\sigma_{11} = ((3, 0, 0); (3, 1, 0); (3, 1, 1); (4, 1, 1))$$

$$\sigma_{12} = ((3, 0, 0); (3, 1, 0); (4, 1, 0); (4, 1, 1))$$

$$\sigma_{13} = ((3, 0, 0); (4, 0, 0); (4, 1, 0); (4, 1, 1))$$

A faceta-0 de σ_{13} é completamente rotulada (os rótulos dos vértices de σ_{13} são, respectivamente, 2, 2, 3 e 1) e está contida em \widehat{H}_1^+ , então existe um conjunto-1 vencedor. Para formar o conjunto-1 vencedor que liga as faces opostas \widehat{H}_1^- a \widehat{H}_1^+ escolhem-se apenas os vértices com rótulo 1 em cada simplex do caminho

$$P = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{13}),$$

que se encontra representado na figura 2.4.

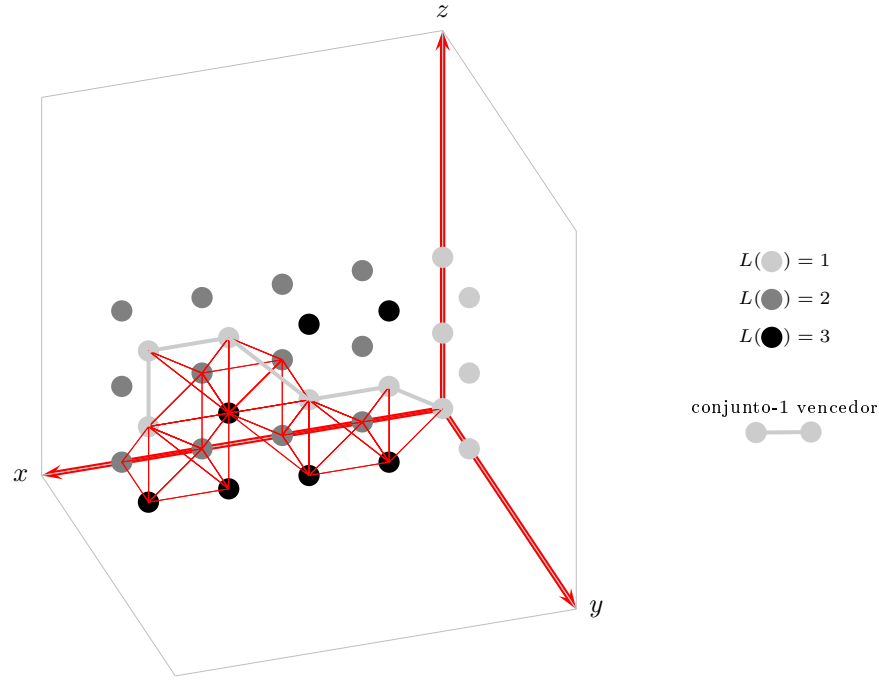


Figura 2.4: Aplicação do algoritmo.

2.4 Aproximação ao Ponto Fixo

Tendo por base o que já foi escrito até ao momento conseguimos construir um algoritmo que nos permite encontrar uma aproximação ao ponto fixo de funções contínuas de I^n para I^n .

Definição 2.4.1 Seja $f : I^n \rightarrow I^n$ uma função contínua. Diz-se que um ponto $x \in I^n$ é movido pela função f na direcção i se

$$|f_i(x) - x_i| = |f(x) - x|,$$

onde caso se verifique um empate escolhemos o índice menor.

Consideremos o tabuleiro de Nash de dimensão n e tamanho k de acordo com a definição 2.1.1. Quanto maior for o valor de k , melhor será a aproximação ao ponto fixo, pois quanto maior for o valor de k maior vai ser o número de iterações necessárias e por consequência menor vai ser o erro cometido.

Para encontrar a aproximação ao ponto fixo segue-se um algoritmo semelhante ao apresentado na secção anterior. Sendo z um qualquer vértice de H , o rótulo $L(z)$ é dado pela direcção na qual

$\frac{z}{k+1}$ é movido pela função f , segundo a definição 2.4.1. Não é necessário calcular o rótulo de todos os k^n vértices do tabuleiro H , ter-se-á apenas que calcular o rótulo de cada novo vértice que vai sendo incluído em cada simplex do caminho P .

O algoritmo, partindo do simplex σ_0 é o seguinte:

1. Verifica-se o rótulo do vértice e .

Se $L(e) = i + 1$, então calcula-se o vizinho- i de σ_0 e designa-se o novo simplex por σ_1 .

2. Verifica-se o rótulo de \tilde{z}^i .

Como vimos anteriormente, o simplex σ_1 contém exactamente um outro vértice com o mesmo rótulo de \tilde{z}^i . Substituindo esse vértice pelo seu companheiro, obtém-se um novo simplex, σ_2 . O procedimento repete-se até que se encontrem dois vértices adjacentes, z e z' , em que ambos são movidos numa direcção i , mas o primeiro é movido num sentido, ou seja, $f_i\left(\frac{z}{k+1}\right) - \frac{z_i}{k+1} \geq 0$, por exemplo, e o segundo é movido no sentido oposto, isto é, $f_i\left(\frac{z'}{k+1}\right) - \frac{z'_i}{k+1} < 0$.

A aproximação ao ponto fixo da função f é dada por $f\left(\frac{z'}{k+1}\right)$.

Exemplo 2.4.1 Para exemplificar a aplicação do algoritmo consideremos a função $f : I^3 \rightarrow I^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 1 - x_1, x_2^2)$$

e, por conseguinte, um tabuleiro de dimensão $n = 3$. O tamanho do tabuleiro H considera-se igual a 4.

Começamos por determinar o rótulo de e :

Como

$$f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{25}\right),$$

temos

$$\left|f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\right| = \left|\left(0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right| = \frac{3}{5},$$

e portanto $L(z_3) = 2$.

Uma vez que os rótulos dos vértices de σ_0 são, respectivamente, 1, 2, 3 e 2 vamos calcular o vizinho-1 de σ_0 :

$$\sigma_1 = ((0, 0, 0); (0, 1, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)).$$

Os rótulos dos vértices de σ_1 são 1, 1, 3 e 2, respectivamente (note-se que $\hat{z} \in \hat{H}_1^-$), logo vamos calcular o vizinho-0 de σ_1 :

$$\sigma_2 = ((0, 1, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (1, 2, 1)).$$

Agora precisamos de calcular o rótulo de z^3 .

Dado que

$$f\left(\frac{z^3}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{25}\right)$$

e

$$\left| f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{25}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \left(0, \frac{2}{5}, -\frac{4}{25}\right) \right| = \frac{2}{5},$$

então $L(z^3) = 2$.

Portanto, os rótulos dos vértices de σ_2 são, respectivamente, 1, 3, 2 e 2, pelo que devemos agora calcular o vizinho-2 de σ_2 :

$$\sigma_3 = ((0, 1, 0); (1, 1, 0); (1, 2, 0); (1, 2, 1)).$$

Note-se que o rótulo de z^2 é igual a 3, pois $z^2 \in \widehat{H}_3^-$, e como z^1 é o outro vértice com o mesmo rótulo, então vamos calcular $\tilde{\sigma}_3^1$:

$$\sigma_4 = ((0, 1, 0); (0, 2, 0); (1, 2, 0); (1, 2, 1)).$$

Verifica-se que existe um vértice, z^1 , em \widehat{H}_1^- . Uma vez que z^0 também tem rótulo igual a 1, vamos calcular o vizinho-0:

$$\sigma_5 = ((0, 2, 0); (1, 2, 0); (1, 2, 1); (1, 3, 1)).$$

Agora precisamos de calcular o rótulo de z^3 .

Ora,

$$f\left(\frac{z^3}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right)$$

e

$$\left| f\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \left(0, \frac{1}{5}, \frac{4}{25}\right) \right| = \frac{1}{5},$$

então $L(z^3) = 2$.

Assim, uma vez que os rótulos dos vértices de σ_5 são 1, 3, 2 e 2, respectivamente, vamos calcular o vizinho-2 de σ_5 :

$$\sigma_6 = ((0, 2, 0); (1, 2, 0); (1, 3, 0); (1, 3, 1)).$$

Tendo em atenção que o vértice z^2 de σ_6 , assim como o vértice do simplex seguinte, pertencem a uma face \widehat{H}_i^- , seguindo o algoritmo obtemos os próximos dois simplexes.

$$\sigma_7 = ((0, 2, 0); (0, 3, 0); (1, 3, 0); (1, 3, 1))$$

e

$$\sigma_8 = ((0, 3, 0); (1, 3, 0); (1, 3, 1); (1, 4, 1)).$$

Agora precisamos de calcular o rótulo de z^3

Ora,

$$f\left(\frac{z^3}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}\right)$$

e

$$\left| f\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) \right| = \left| \left(0, 0, \frac{11}{25}\right) \right| = \frac{11}{25},$$

então $L(z^3) = 3$.

Assim, uma vez que os rótulos dos vértices de σ_8 são 1, 3, 2 e 3, respectivamente, vamos calcular o vizinho-1 de σ_8 :

$$\sigma_9 = ((0, 3, 0); (0, 3, 1); (1, 3, 1); (1, 4, 1)).$$

Note-se que o rótulo de z^1 é igual a 1, pois $z^1 \in \widehat{H}_1^-$, e como z^0 é o outro vértice com o mesmo rótulo, então vamos calcular $\tilde{\sigma}_9^0$:

$$\sigma_{10} = ((0, 3, 1); (1, 3, 1); (1, 4, 1); (1, 4, 2)).$$

Agora precisamos de calcular o rótulo de z^3 . Como

$$f\left(\frac{z^3}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}\right)$$

e

$$\left|f\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{6}{25}\right)\right| = \frac{6}{25},$$

então $L(z^3) = 3$.

Uma vez que 1, 2, 3 e 3 são, respectivamente, os rótulos dos vértices de σ_{10} vamos calcular o vizinho-2 deste simplex:

$$\sigma_{11} = ((0, 3, 1); (1, 3, 1); (1, 3, 2); (1, 4, 2)).$$

Para calcular o rótulo de z^2 , determinamos

$$f\left(\frac{z^2}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right)$$

e

$$\left|f\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right) - \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}\right)\right| = \frac{1}{5},$$

pelo que $L(z^2) = 1$.

Assim, vamos calcular $\tilde{\sigma}_{11}^0$:

$$\sigma_{12} = ((1, 3, 1); (1, 3, 2); (1, 4, 2); (2, 4, 2)).$$

Agora precisamos de calcular o rótulo de z^3 . Ora

$$f\left(\frac{z^3}{5}\right) = f\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{16}{25}\right)$$

e

$$\left|f\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{16}{25}\right) - \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(0, -\frac{1}{5}, \frac{6}{25}\right)\right| = \frac{6}{25},$$

então $L(z^3) = 3$.

Dado que os rótulos dos vértices de σ_{12} são, respectivamente, 2, 1, 3 e 3, calculamos de seguida $\tilde{\sigma}_{12}^2$:

$$\sigma_{13} = ((1, 3, 1); (1, 3, 2); (2, 3, 2); (2, 4, 2)).$$

Para calcular o rótulo de z^2 , como

$$f\left(\frac{z^2}{5}\right) = f\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}\right)$$

e

$$\left|f\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}\right) - \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right| = \left|\left(0, 0, -\frac{1}{25}\right)\right| = \frac{1}{25},$$

temos que $L(z^2) = 3$.

Como $L(z^2) = L(z^3) = 3$, então z^2 e z^3 são movidos na direcção 3 e como na terceira componente $f(z^2) - z^2$ e $f(z^3) - z^3$ têm sinais contrários então paramos.

A aproximação ao ponto fixo que procurávamos é dado por:

$$f\left(\frac{z^2}{5}\right) = f\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}\right).$$

Ou seja, o ponto fixo aproximado da função f é

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 4; 0, 6; 0, 36).$$

Calculemos, agora, o ponto fixo da função f através da resolução do sistema:

$$f(z) = z \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 1 - x_1 \\ x_3 = x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \simeq 0,38 \\ x_2 \simeq 0,62 \\ x_3 \simeq 0,38. \end{cases}$$

Comparando a aproximação ao ponto fixo da função f encontrada através do algoritmo com o ponto fixo que calculamos através da resolução do sistema podemos concluir que o erro cometido está na ordem das duas centésimas.

Capítulo 3

Algumas Contribuições do Teorema do Hex

3.1 O Teorema da Curva de Jordan via o Teorema do Hex

O Teorema da Curva de Jordan foi enunciado e demonstrado por Camille Jordan em 1887. Posteriormente veio a descobrir-se que a demonstração estava errada e a primeira demonstração rigorosamente correcta só foi dada em 1905. Entre as demonstrações que foram surgindo desde então vamos apresentar uma baseada em [2]. Essa demonstração faz uso do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer mas repare-se que no capítulo 1 provámos que este teorema é equivalente ao Teorema do Hex, daí o título desta secção.

Para demonstrar o Teorema da Curva de Jordan precisamos de algumas definições e resultados teóricos que enunciamos de seguida.

Definição 3.1.1 *Uma curva de Jordan é um subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo à circunferência unitária.*

Dito de uma forma mais simples, uma curva de Jordan é uma curva fechada simples: fechada porque o início coincide com o fim e simples porque não se intersecta a ela própria.

Teorema 3.1.1 (*Teorema da Curva de Jordan*): *Seja J uma curva de Jordan em \mathbb{R}^2 . O complementar de J é constituído por dois subconjuntos de \mathbb{R}^2 , cada um dos quais com J como fronteira.*

A ideia principal do teorema é que uma curva de Jordan separa o plano em duas regiões, uma limitada (interior à curva) e outra ilimitada (exterior à curva), sendo a própria curva a fronteira comum das duas regiões. Apesar do enunciado ser simples e de fácil compreensão a demonstração do Teorema da Curva de Jordan é complexa e envolve diversos conceitos matemáticos.

Começemos por observar que, uma vez que J é compacto e é localmente conexo por caminhos, temos que:

Lema 3.1.1 *Seja J uma curva de Jordan, então*

1. $\mathbb{R}^2 - J$ tem exactamente uma componente ilimitada;
2. cada componente de $\mathbb{R}^2 - J$ é conexa por caminhos e aberta.

Os lemas seguintes vão ser cruciais para a demonstração do teorema da Curva de Jordan.

Lema 3.1.2 *Seja J uma curva de Jordan. Se $\mathbb{R}^2 - J$ não é conexo, então cada componente tem J como fronteira.*

Para a demonstração deste lema aconselhamos o leitor a consultar [2].

No próximo lema $E(a, b; c, d)$ denota o conjunto rectangular $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, com $a < b$ e $c < d$. De uma forma intuitiva, o lema diz que se num rectângulo uma curva h vai do lado esquerdo ao lado direito e outra curva v vai de cima a baixo, então as curvas intersectam-se, conforme ilustrado na figura 3.1.

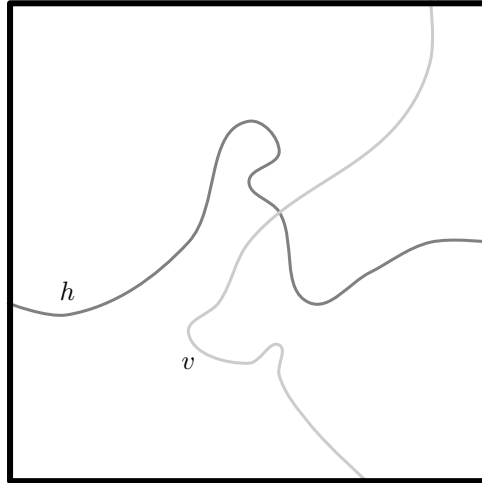


Figura 3.1: Representação das imagens das funções h e v .

Lema 3.1.3 *Sejam $h = (h_1, h_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ duas funções contínuas do intervalo $[-1, 1]$ para $E(a, b; c, d)$ tais que*

$$h_1(-1) = a, h_1(1) = b, v_2(-1) = c \text{ e } v_2(1) = d.$$

Então as curvas h e v encontram-se, isto é, existem $s, t \in [-1, 1]$ tais que $h(s) = v(t)$.

Demonstração: Suponhamos que as duas curvas não se encontram, ou seja, suponhamos que $h(s) \neq v(t)$, para todo $s, t \in [-1, 1]$.

Começemos por definir a função N do seguinte modo:

$$N : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s, t) \mapsto N(s, t) = |h(s) - v(t)|,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma máximo. Ou seja,

$$N(s, t) = \max\{|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)|\}$$

Assim, a função N é contínua uma vez que é a norma máximo de uma diferença entre duas funções contínuas. Também $N(s, t)$ é sempre diferente de zero, pois se para algum ponto $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ tivéssemos $N(s, t) = 0$, então, pela definição de norma teríamos que $h(s) = v(t)$, mas por hipótese tal não ocorre.

Então, como $N(s, t) \neq 0$ para todo o $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, podemos definir a função F do seguinte modo:

$$F : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$F(s, t) = \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s, t)} \right)$$

A função F é contínua porque cada uma das suas componentes é o quociente de duas funções contínuas. Pela forma como F está definida, podemos concluir que uma das suas componentes é sempre igual a $+1$ ou a -1 , ou seja, uma das coordenadas de $F(s, t)$ tem sempre valor absoluto igual a 1. Como F é contínua, então pelo teorema do Ponto Fixo de Brouwer F tem um ponto fixo, ou seja, existe um ponto $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ tal que $F(s, t) = (s, t)$. Como uma das coordenadas $F(s, t)$ tem valor absoluto igual a 1, podemos concluir que $|s| = 1$ ou $|t| = 1$.

Analisemos o caso em que $s = 1$.

Se $s = 1$ então $F(1, t) = (1, t)$, portanto,

$$1 = \frac{v_1(t) - h_1(1)}{N(1, t)} = \frac{v_1(t) - b}{N(1, t)},$$

mas $v_1(t) \leq b$, logo,

$$1 = \frac{v_1(t) - b}{N(1, t)} \leq 0.$$

Chegámos assim a uma contradição. Analisando os outros três casos ($s = -1, t = 1$ e $t = -1$) e fazendo um raciocínio análogo ao que foi feito para $s = 1$ chegamos também a contradições.

Podemos então concluir que as curvas h e v se encontram, isto é, existem $s, t \in [-1, 1]$ tais que $h(s) = v(t)$. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema da Curva de Jordan.

Pelos lemas 3.1.1 e 3.1.2 sabemos que $\mathbb{R}^2 - J$ tem exactamente uma componente ilimitada e que cada componente tem J como fronteira, então só precisamos de provar que $\mathbb{R}^2 - J$ possui uma e só uma componente limitada. Vamos provar tal facto em três etapas: 1) obter um ponto $z_0 \in \mathbb{R}^2 - J$; 2) provar que a componente U que contém z_0 é limitada e 3) mostrar que não existe outra componente limitada para além de U .

Como J é compacto, então existem dois pontos $a, b \in J$ tais que a distância $|a - b|$ é máxima. Podemos assumir que $a = (-1, 0)$ e $b = (1, 0)$ pela definição da Curva de Jordan. Consequentemente $E(-1, 1; -2, 2)$ contém J e a sua fronteira, Γ , e intersecta J exactamente nos pontos a e b .

Seja N o ponto médio do lado superior de $E(-1, 1; -2, 2)$ e S o ponto médio do lado inferior, ou seja, $N = (0, 2)$ e $S = (0, -2)$. Pelo lema 3.1.3 podemos concluir que o segmento $[NS]$ intersecta J . Seja L o ponto pertencente a $J \cap [NS]$ cuja ordenada tem o maior valor.

Os pontos a e b dividem J em dois arcos, designemos o arco que contém L por J_n e o outro por J_s . Seja M o ponto pertencente a $J_n \cap [NS]$ cuja ordenada tem o menor valor (repare-se que é possível que $L=M$). Assim, o segmento $[MS]$ intersecta J_s , pois se o segmento $[MS]$ não intersectasse J_s , então considerando o caminho $[NL] \cup \widetilde{LM} \cup [MS]$, onde \widetilde{LM} é o subarco de J_n com extremos L e M , teríamos que $[NL] \cup \widetilde{LM}$ intersecta J_s , mas como o arco J_s não contém L então \widetilde{LM} deveria intersectar J_s . Mas se \widetilde{LM} intersectasse J_s então J não seria homeomorfo a uma circunferência. Assim, J_s não intersectaria o caminho $[NL] \cup \widetilde{LM} \cup [MS]$, mas tal contradiz o lema 3.1.3.

Consideremos agora os pontos $P, Q \in J_s \cap [MS]$ tais que P é o ponto cuja ordenada tem maior valor e Q o ponto cuja ordenada tem menor valor, e seja z_0 o ponto médio do segmento $[MP]$.

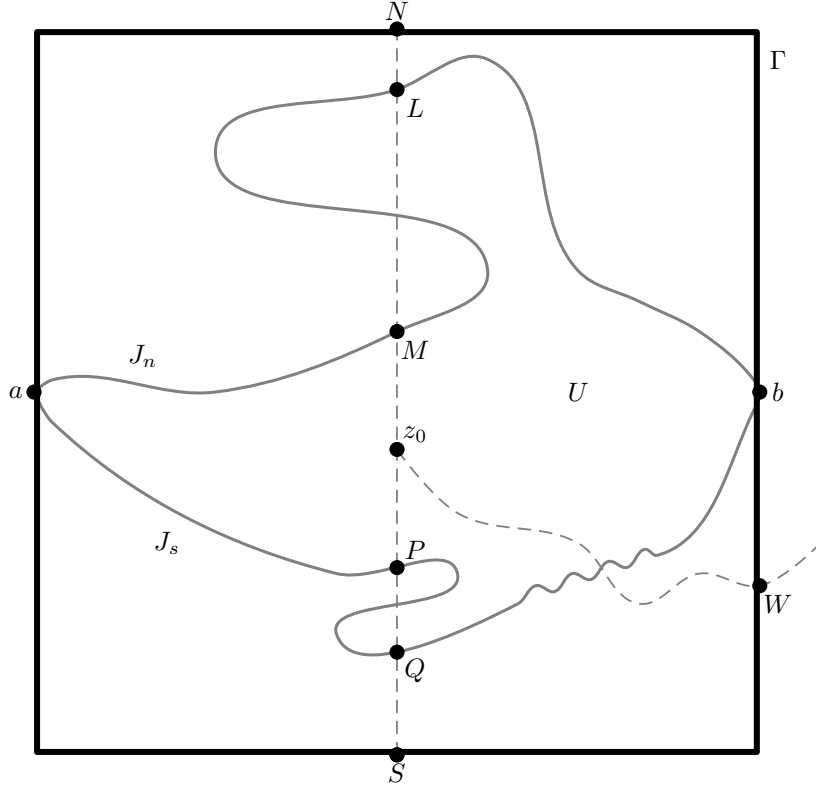


Figura 3.2: Ilustração das etapas 1), 2) e 3) da demonstração.

De seguida vamos mostrar que U , a componente de $\mathbb{R}^2 - J$ que contém z_0 , é limitada. Suponhamos que U não é limitada. Como, pelo lema 3.1.1, U é conexo por caminhos, existe um caminho α em U de z_0 para um ponto não pertencente a $E(-1, 1; -2, 2)$. Seja W o primeiro ponto no qual α intersecta a fronteira Γ de $E(-1, 1; -2, 2)$. Denotemos por α_w a parte de α de z_0 a W . Se W está na metade inferior de Γ , podemos encontrar um caminho \widehat{WS} em Γ de W para S que não contém nem a nem b . Consideremos agora o caminho $[NL] \cup \widehat{LM} \cup [Mz_0] \cup \alpha_w \cup \widehat{WS}$. Se α_w está contido em $U \subset \mathbb{R}^2 - J$, então esse caminho não intersecta J_s , o que contradiz o lema 3.1.3. Fazendo um raciocínio análogo, se W está na metade superior de Γ concluímos que o caminho $[Sz_0] \cup \alpha_w \cup \widehat{WN}$, onde \widehat{WN} é um caminho em Γ de W para N que não contém a nem b , não intersecta J_n , contradizendo uma vez mais o lema 3.1.3. Logo, podemos concluir que U é uma componente limitada.

Para finalizar vamos mostrar que U é a única componente limitada. Suponhamos que existe outra componente limitada Y , com $Y \neq U$, de $\mathbb{R}^2 - J$. Designemos por β o caminho $[NL] \cup \widehat{LM} \cup [MP] \cup \widehat{PQ} \cup [QS]$. Repare-se que β não contém pontos em Y . Como a e b não estão em β então existem vizinhanças de a e b , V_a e V_b respectivamente, tais que cada uma delas não contém pontos de β . Pelo lema 3.1.2, como Y é uma componente que possui J como sua fronteira, então a e b estão em \overline{Y} . Assim, existem $a_1 \in Y \cap V_a$ e $b_1 \in Y \cap V_b$. Seja $\widehat{a_1 b_1}$ um caminho em Y de a_1 para b_1 . Logo, o caminho $[aa_1] \cup \widehat{a_1 b_1} \cup [b_1 b]$ não intersecta β . Mas isso contradiz o lema 3.1.3. Logo, podemos concluir que $\mathbb{R}^2 - J$ tem exactamente duas componentes, uma limitada e outra ilimitada, cada uma das quais com J como fronteira.

3.2 O Teorema do Hex Fortalecido

Nesta secção vamos mostrar que num tabuleiro de Hex de dimensão 2 totalmente preenchido existe um único caminho que liga lados opostos. Uma vez que no capítulo 1 provou-se que existe pelo menos um caminho nessas condições, basta provar que no máximo existe um desses caminhos. Para cumprir com este objectivo usaremos o lema 3.1.3 da secção anterior.

Teorema 3.2.1 *Se um tabuleiro de Hex de dimensão 2 está completamente preenchido com peças pretas e brancas, então no máximo existe um caminho que une lados opostos.*

Demonstração: Como no capítulo 1 (secção 1.4) provámos que os tabuleiros de Hein e de Nash são equivalentes, então para a nossa demonstração vamos considerar o tabuleiro de Nash.

Suponhamos que há dois caminhos a ligar os lados opostos do tabuleiro: esses dois caminhos são caminhos em grafos.

Vamos construir duas funções $h, v : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$ tais que h segue o caminho das peças pretas e v o caminho das peças brancas e de modo a que estas funções satisfaçam as hipóteses do lema 3.1.3. Podemos então concluir que as funções h e v se intersectam, ou seja, os dois caminhos cruzam-se, o que implica que existe um vértice com uma peça preta e uma peça branca, mas tal é impossível.

Podemos assim concluir que num jogo de Hex se o tabuleiro está completamente preenchido, então no máximo há um caminho a ligar lados opostos. ■

Deste modo fica provado que:

Teorema 3.2.2 (*Teorema do Hex Fortalecido*): *Se um tabuleiro de Hex de dimensão 2 está completamente preenchido com peças pretas e brancas, então existe exactamente um caminho que une lados opostos.*

3.3 O Teorema da Pavimentação

Uma pavimentação é uma disposição de um conjunto numerável de rectângulos sobre um plano sem espaços intermédios nem sobreposições. Se um ponto pertence a mais do que um rectângulo, então ele pertence necessariamente à fronteira dos rectângulos e não ao seu interior.

O resultado conhecido como Teorema da Pavimentação estabelece que uma área rectangular pavimentada com rectângulos com um dos lados inteiro tem, também ela, um dos lados inteiro.

Nesta secção vamos apresentar duas demonstrações do Teorema da Pavimentação: uma usa o tabuleiro de Damas como modelo, cujos quadrados têm $\frac{1}{2}$ unidade de lado; a outra usa um processo análogo ao usado para provar o Teorema do Hex. Ambas as demonstrações foram elaboradas com base em [3].

Considere-se o seguinte resultado:

Lema 3.3.1 *Um rectângulo, desenhado sobre um tabuleiro de Damas, cujos lados são paralelos aos lados do tabuleiro tem um lado de comprimento inteiro se e só se ocupa áreas iguais de branco e preto.*

Demonstração: Começemos por provar que se o rectângulo tem pelo menos um lado cujo comprimento é um número inteiro então vai ocupar áreas iguais de preto e branco.

Como cada quadrado do tabuleiro tem $\frac{1}{2}$ unidade de lado então o lado inteiro do rectângulo vai ocupar um número par de quadrados. Portanto, ocupa tantos quadrados brancos como pretos.

Logo, podemos concluir que o rectângulo ocupa áreas de branco e preto iguais, como se ilustra na figura 3.3.

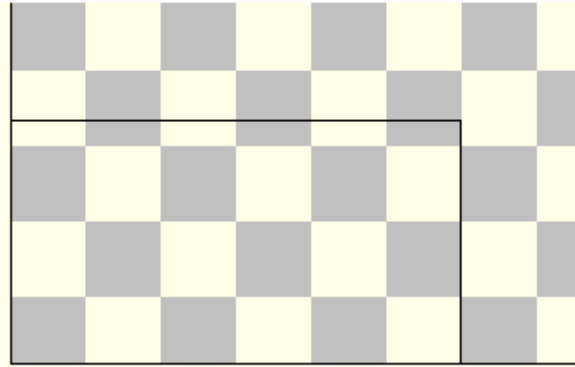


Figura 3.3: Rectângulo com um lado inteiro.

Para provar o recíproco vamos garantir que se o rectângulo tem dois lados de comprimento não inteiro então as áreas ocupadas de branco e preto não são iguais. Para a demonstração vamos considerar que o rectângulo está alinhado com o canto inferior esquerdo do tabuleiro de Damas. Suponhamos que o rectângulo tem lados x e y não inteiros, como se ilustra com a figura 3.4. Se ao rectângulo retirarmos o canto superior direito, definido por $[[x], x] \times [[y], y]$, destacado a negrito na figura 3.4, então as áreas ocupadas de branco e preto são iguais.

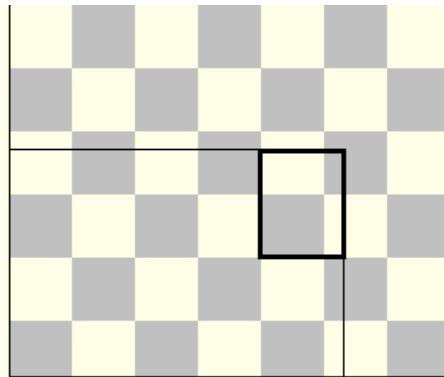


Figura 3.4: Rectângulo com os dois lados de comprimento não inteiro.

Analisemos então o que acontece com as áreas branca e preta do rectângulo a negrito. Dividindo o rectângulo como se mostra na figura 3.5, o rectângulo da direita, definido por $[2[x] - x + 1, x] \times [[y], y]$, ocupa a mesma área de branco e preto.

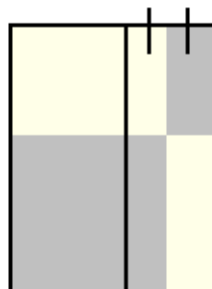


Figura 3.5: Área destacada na figura 3.4.

Vamos analisar agora o rectângulo da esquerda, definido por $[[x], 2[x] - x + 1] \times [[y], y]$. Mais uma

vez, dividindo o rectângulo como se mostra na figura 3.6 verificamos que o rectângulo superior, definido por $[[x], 2[x] - x + 1] \times [2[y] - y + 1, y]$, ocupa a mesma área de branco e de preto.

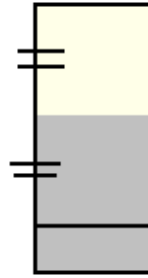


Figura 3.6: Área preta em excesso.

Portanto chegamos à conclusão que a área preta excede a branca e a diferença entre elas corresponde ao rectângulo inferior representado na figura 3.6, cuja área é $([x] - x + 1)([y] - y + 1)$. ■

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o Teorema da Pavimentação.

Teorema 3.3.1 *Se uma área rectangular está pavimentada por um número finito de rectângulos, cada um dos quais com um lado de comprimento inteiro, então a área rectangular também tem um lado de comprimento inteiro.*

Demonstração: Consideremos que a área rectangular está alinhada com o canto inferior esquerdo do tabuleiro de Damas. Como cada rectângulo tem um lado inteiro, então pelo lema 3.3.1, ocupa áreas iguais de preto e branco. Assim, a área rectangular também ocupa áreas iguais de preto e branco e portanto, mais uma vez pelo lema 3.3.1, a área rectangular tem um lado de comprimento inteiro. ■

Note-se que o mesmo resultado é válido para rectângulos com um lado de comprimento racional. De facto, o lema 3.3.1 não perde a validade para um rectângulo com um lado de comprimento racional $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) pois basta tomar como unidade $\frac{1}{q}$. De seguida vamos generalizar o Teorema da Pavimentação ao caso de rectângulos com um lado de comprimento algébrico.

Teorema 3.3.2 *Se uma área rectangular está pavimentada por um número finito de rectângulos, cada um dos quais com um lado de comprimento inteiro / racional / algébrico, então a área rectangular também tem um lado de comprimento inteiro / racional / algébrico.*

Demonstração: Na nossa demonstração vamos designar por número especial um número inteiro, racional ou algébrico. Para cada caso, um ponto (x, y) é especial se x e y forem inteiros / racionais / algébricos. Note-se que a soma e a diferença de dois números especiais é ainda um número especial.

Considere-se então uma área rectangular pavimentada por rectângulos pequenos, cada um deles com um lado de comprimento especial. Como veremos, a prova de que a área rectangular tem também um lado de comprimento especial assemelha-se à prova do Teorema do Hex. Essa semelhança prende-se com o facto de em ambos os casos se construir um caminho num grafo.

Seja Γ o grafo cujos vértices são os cantos de todos os rectângulos e as arestas são os lados de comprimento especial. No caso de ambos os lados de um rectângulo serem especiais, tomem-se como arestas dois lados paralelos quaisquer.

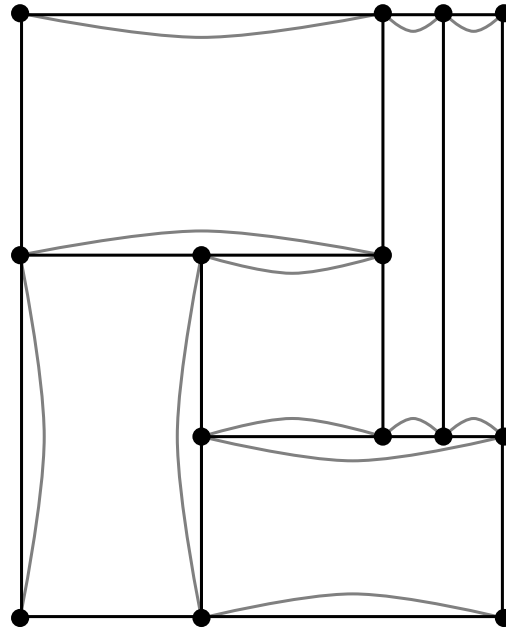


Figura 3.7: Grafo Γ .

Pela forma como o grafo foi construído pode existir mais do que uma aresta entre o mesmo par de vértices. Como todos os vértices, excepto os dos cantos da área rectangular, pertencem a dois ou a quatro rectângulos então têm grau 2 ou 4. Os vértices dos cantos da área rectangular têm grau 1. Vamos fazer coincidir o canto inferior esquerdo da área rectangular com a origem de um referencial. Então esse vértice é especial. Começando nesse vértice vamos construir um caminho ao longo do grafo avançando sempre por uma aresta que ainda não tenha sido percorrida. Uma vez que todos os vértices têm grau par (excepto os dos cantos da área rectangular), então haverá sempre uma outra aresta para percorrer, a menos que tenhamos chegado a um dos vértices dos cantos da área rectangular. O número de arestas do grafo é finito, então em algum momento do trajecto chegamos a um vértice dos cantos da área rectangular diferente do vértice do canto inicial. Como começámos num vértice especial e só percorremos arestas de comprimento especial, então o vértice em que terminámos o trajecto também é especial. Repare-se que começámos o caminho num vértice especial e avançámos por uma aresta especial e como a soma de dois números especiais é um número especial, então o próximo vértice visitado também é especial. Deste modo todos os vértices visitados são especiais. Logo, podemos concluir que a área rectangular tem dois cantos especiais, portanto tem pelo menos um lado de comprimento especial. Uma vez que começámos o caminho no canto inferior esquerdo, então se terminarmos no canto inferior direito é porque a área rectangular tem o lado horizontal de comprimento especial. Caso o vértice terminal seja o do canto superior esquerdo então a área rectangular tem o lado vertical de comprimento especial e por último se o vértice terminal for o vértice do canto superior direito então a área rectangular tem os dois lados de comprimento especial. ■

Por último, note-se que é possível generalizar o Teorema da Pavimentação para a dimensão n . Para tal vamos designar um rectângulo de dimensão n por hiper-rectângulo e vamos reescrever o teorema 3.3.2.

Teorema 3.3.3 *Se um hiper-volume rectangular está subdividido num número finito de hiper-rectângulos, cada um dos quais com, pelo menos, uma dimensão de comprimento inteiro / racional*

/ algébrico, então o hiper-volume rectangular também tem pelo menos uma dimensão de comprimento inteiro / racional / algébrico.

A demonstração deste teorema é análoga à do teorema anterior.

A título de curiosidade, consideremos $n = 3$. Neste caso, vamos fazer coincidir um dos cantos inferiores do volume rectangular com a origem de um referencial em \mathbb{R}^3 de modo a que o volume rectangular pertença ao primeiro octante e vamos designar por dimensão A (B , C) as dimensões paralelas ao eixo dos xx (yy , zz). Considere-se que os lados do volume rectangular são x , y e z . Definindo o grafo e construindo um caminho de forma análoga ao da dimensão 2, então podemos concluir que se o caminho termina no vértice de coordenadas $(x, 0, 0)$ ($(0, y, 0)$; $(0, 0, z)$) então a dimensão A (B , C) é especial. Caso o caminho termine no vértice com coordenadas $(x, y, 0)$ ($(x, 0, z)$; $(0, y, z)$) então as dimensões A e B (A e C ; B e C) são especiais. Por último, se o vértice terminal tem coordenadas (x, y, z) , então o volume rectangular tem as três dimensões especiais. Repare-se que também é possível demonstrar o teorema 3.3.3 para o caso inteiro e racional usando o tabuleiro de Damas fazendo um raciocínio análogo ao que foi feito para demonstrar o teorema 3.3.1.

Apêndice A

A.1 Definições e Resultados Teóricos sobre Grafos

Definição A.1.1 Um grafo, $G = (V, E)$, é um par ordenado onde V é um conjunto arbitrário que se designa por conjunto dos vértices (ou nodos) e E é um subconjunto do conjunto de pares não ordenados de elementos de V que se designa por conjunto das arestas.

Definição A.1.2 Dois vértices, $x, y \in V$, de um grafo $G = (V, E)$ dizem-se adjacentes se $[x, y]$ é uma aresta de G , ou seja, se $[x, y] \in E$. Neste caso, diz-se que a aresta $[x, y]$ é incidente no vértice x e no vértice y .

Definição A.1.3 Um passeio num grafo G é uma sequência de vértices e arestas da forma,

$$x_1, [x_1, x_2], \dots, x_i, [x_i, x_{i+1}], x_{i+1}, \dots, [x_{k-1}, x_k], x_k$$

(com eventual repetição de vértices e de arestas). Os vértices x_1 e x_k designam-se por vértices extremos do passeio (x_1 por vértice inicial e x_k por vértice final).

Definição A.1.4 Um trajecto num grafo G entre os vértices x e y é um passeio sem arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos) com início em x e que termina em y .

Definição A.1.5 Um caminho num grafo G entre os vértices x_1 e x_p é um subgrafo, P , tal que

$$V(P) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \text{ e } E(P) = \{[x_1, x_2], \dots, [x_{p-1}, x_p]\}.$$

Desta definição decorre que num caminho não existem vértices repetidos e, conseqüentemente, também não existem arestas repetidas. Deste modo pode considerar-se um caminho, entre x_1 e x_p , como sendo um trajecto, sem vértices repetidos, com início em x_1 e que termina em x_p .

Definição A.1.6 Um ciclo é um passeio de comprimento não nulo cujos únicos vértices que coincidem são os vértices extremos.

Definição A.1.7 Um grafo G diz-se conexo se existe sempre um caminho a unir quaisquer dois dos seus vértices.

Definição A.1.8 Um grafo $G' = (V', E')$ diz-se subgrafo de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se E' contém todas as arestas de G que ligam os vértices de V' , então diz-se que $G' = (V', E')$ é o subgrafo induzido ou gerado por V' .

Definição A.1.9 Designa-se por grau (ou valência) de um vértice de um grafo G , o número de arestas que são incidentes a esse vértice.

Definição A.1.10 O produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2 define-se como sendo um grafo $G_1 \times G_2$ cujos vértices são pares ordenados de vértices de G_1 e G_2 e dois vértices de $G_1 \times G_2$, (u_1, u_2) e (v_1, v_2) , são adjacentes se e só se $u_1 = v_1$ e $[u_2, v_2] \in E(G_2)$ ou $u_2 = v_2$ e $[u_1, v_1] \in E(G_1)$.

Lema A.1.1 Um grafo cujos vértices têm no máximo grau dois é a união de subgrafos disjuntos, sendo cada um destes subgrafos um vértice isolado, ou um ciclo ou um caminho.

Demonstração: Por indução sobre o número de arestas do grafo.

Considere-se um grafo G com n vértices. Cada vértice pode ter no máximo grau dois, então G pode ter no máximo n arestas.

Denote-se um grafo com k arestas por G_k .

No caso de G_0 , todos os vértices são isolados.

No caso G_{n+1} , escolhe-se aleatoriamente uma aresta para ser retirada e designe-se essa aresta por (u, v) . Os vértices u e v passam a ter no máximo grau 1, uma vez que se retirou a aresta que os ligava e no máximo tinham grau dois. Como os vértices u e v têm no máximo grau 1, então não podem pertencer a nenhum ciclo.

Por hipótese, G_n é a união de vértices isolados, ciclos e caminhos, se se adicionar novamente a aresta (u, v) ao grafo, os subgrafos que se tinham obtido pela exclusão da aresta continuam inalterados e ao adicionar novamente a aresta a única coisa que se altera é que os vértices u e v passarão a fazer parte de um mesmo ciclo ou caminho.

Portanto, pode-se concluir que G_{n+1} também é a união de vértices isolados, ciclos e caminhos. Donde se pode concluir que o Lema se verifica para todos os grafos G_k , com $0 \leq k \leq n$. ■

A.2 Definições e Resultados Teóricos sobre Funções

Definição A.2.1 Um ponto fixo de uma função f é um ponto x tal que $f(x) = x$.

Definição A.2.2 Um espaço topológico X diz-se compacto se qualquer sucessão $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ de pontos de X , contém uma subsucessão que converge para algum ponto x do conjunto X .

Lema A.2.1 Seja $I^2 = [a, b] \times [a, b]$. Se $f : I^2 \rightarrow I^2$ é uma função contínua e para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in I^2$ tal que $|f(x) - x| < \varepsilon$ então, f tem um ponto fixo.

Demonstração: Seja $f : I^2 \rightarrow I^2$ uma função contínua tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in I^2$ tal que $|f(x) - x| < \varepsilon$ então, para cada número natural n existe $x_n \in I^2$ tal que $|f(x_n) - x_n| < \frac{1}{n}$. Como I^2 é compacto então a sucessão $\langle x_n \rangle$ tem uma subsucessão, $\langle x_{n_k} \rangle$, convergente em I^2 . O $\lim |f(x_{n_k}) - x_{n_k}| = 0$, logo podemos concluir que f tem um ponto fixo. ■

Definição A.2.3 Um ponto p é uma combinação linear convexa dos pontos $p_1, \dots, p_m \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_m p_m, \text{ onde } \lambda_i \in \mathbb{R}_0^+, i = 1, \dots, m \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Definição A.2.4 Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo quando, para quaisquer pontos $x, y \in S$, qualquer combinação linear convexa de x e y está ainda em S .

Definição A.2.5 O Invólucro Convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é o menor conjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém S e denota-se por $\text{conv}(S)$, isto é, verifica as seguintes propriedades:

- $\text{conv}(S)$ é convexo;
- $S \subseteq \text{conv}(S)$;
- K convexo, $S \subseteq K \Rightarrow \text{conv}(S) \subseteq K$.

Lema A.2.2 Sejam z^1, z^2, z^3 vértices de um triângulo qualquer em \mathbb{R}^2 e seja $\hat{\rho}$ uma extensão linear por troços da função ρ definida por $\rho(z^i) = z^i + v^i$ onde v^1, v^2, v^3 são vectores dados. Então $\hat{\rho}$ tem um ponto fixo se e só se o zero pertence ao invólucro convexo de v^1, v^2, v^3 .

Demonstração: Seja $x = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3$. Então,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x) &= \lambda_1(z^1 + v^1) + \lambda_2(z^2 + v^2) + \lambda_3(z^3 + v^3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \hat{\rho}(x) &= (\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3) + (\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{\rho}(x) = x + (\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3) \end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\rho}(x) = x$ se e só se $\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3 = 0$. ■

A.3 Definições e Resultados Teóricos sobre Espaços Topológicos

Definição A.3.1 Um espaço topológico é conexo se e só se não for reunião de dois subconjuntos disjuntos, não vazios e abertos.

Definição A.3.2 Um caminho de um ponto x para um ponto y de um espaço topológico X é uma função contínua f do intervalo unitário $[0, 1]$ para X com $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Definição A.3.3 O espaço X é dito conexo por caminhos se existe um caminho unindo quaisquer dois pontos em X .

Definição A.3.4 O espaço X é localmente conexo por caminhos se para qualquer vizinhança centrada num qualquer ponto de X existir uma vizinhança conexa por caminhos.

Bibliografia

- [1] Gale, David, The Game of Hex and The Brouwer Fixed-Point Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol 86, N.º10, pp.818-827, 1979.
- [2] Maehara, Ryuji, The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem, *American Mathematical Monthly*, Vol. 91, No. 10, pp 641-643, 1984.
- [3] Mackay, David J.C., Simple Proofs of a Rectangle Tiling Theorem, 2003.
- [4] Cardoso, Domingos, Grafos e Problemas Combinatórios, Departamento de Matemática da U. A., 1997.
- [5] Maarup, Thomas, Everything You Always Wanted to Know About Hex But Were Afraid to Ask, University of Southern Denmark, Department of Mathematics and Computer Science, 2005.